técnica

963

associação dos estudantes do instituto superior técnico

dezembro 1966

revista de engenharia

CIMENTO SECIL

SECIL

Fábrica:

Outão — Setúbal

Telef. 228824/5

Escritório:

R. do Comércio, 56-3.º

LISBOA 2

Telef. 328201/2/3

confiança para a construção com

materiais novobra

EM BETÃO PRÉ-ESFORÇADO

pavimentos
coberturas
vigas de grande vão
asnas
perfis

SOCIEDADE DE PRÉ-FABRICAÇÃO E OBRAS GERAIS, NOVOBRA, LDA.
AV. EST. UNIDOS DA AMÉRICA, 100, 5.º D. - TEL. 77 48 32/766446 - LISBOA-5

HELIAÇO

VARÕES DE AÇO DE ALTA RESISTÊNCIA PARA BETÃO ARMADO TIPO A. 40 («Heliaço» e «SNT 40»)

TENSÕES DE SEGURANÇA

Ra = 2400 kg/cm²
e
Ra = 4000 kg/cm² (SISMOS)

Literatura e Tabelas de Cálculo fornecidas gratuitamente

HELIAÇO, LDA.

R. DE S. JULIÃO, 41, 4.º D. — LISBOA

Tel.: 36 78 17 - 32 37 06 - 36 94 77

técnica

NÚMERO 363 * DEZEMBRO DE 1966 * ANO XLI * VOLUME XXIX * PUBLICAÇÃO MENSAL

Director
Assis Farinha Martins

Administrador
V. M. Martins Pinto

Secretário
Victor Coias e Silva

Redactores
Carlos A. C. Monteiro
J. E. Pinto Ferreira
João M. G. Caraça

Editor e Proprietário
Associação dos Estudantes do Instituto Superior Técnico

Redacção e Administração
Avenida Rovisco Pais
Telefone 77 54 49
Lisboa 1

★

Assinaturas

		5 N.os	10 N.os
Continente e Ilhas	—	70$00	130$00
Ultramar, Brasil e Espanha	—	80$00	140$00
Estrangeiro	—	90$00	150$00

Número avulso — 20$00

★

Os artigos assinados são da exclusiva responsabilidade dos seus autores.

Composto e impresso na Tipografia Jorge Fernandes, Lda. — Rua da Cruz dos Poiais, 103 — Lisboa

SUMÁRIO

97 *SALES LUÍS* — **Tensor energia - impulsão entrópica**
Enthropic energy-momentum tensor

103 *J. BRASÃO FARINHA* — **Vigas em consola**
Cantilever beams

113 *J. MADEIRA COSTA* — **Método gráfico analítico para a determinação das solicitações em maciços de duas estacas**
Design method for the determination of load in groups of two piles

119 *GUSTAVO DE CASTRO* — **Códigos separáveis ou ùnicamente decifráveis, primitivos ou imediatamente decifráveis**
Uniquely and instantaneously deciphrable codes

129 *BENTO LEAL* — **Um apontamento sobre séries útil para o cálculo de limites**
A note on series with a view to the calculation of limits

*

102 **Notas Informativas**
Elementos sobre a produção e o consumo de energia na rede eléctrica nacional

133 **Do Mundo Técnico**
Os geradores magneto-hidrodinâmicos e as suas possibilidades actuais — Fábrica para exploração duma nova técnica de recuperação de molibdénio.

155 **Biblioteca**

CAPA Construção industrializada em Santo António dos Cavaleiros, junto à E. N. n.º 8 — Lisboa - Loures

Índice Alfabético dos nossos anunciantes

A — Pág.

AEG XXI
A. Johnson & Co (Portugal), Ltd. . . XXVIII
Aguiar e Melo XXIX
Asea Eléctrica Ld. V

C

CIDEX IV
Cimento Secil . . . . . 2.ª da capa
Companhia de Cimentos Brancos . . VIII
Companhia Portuguesa de Fornos Eléctricos XXX
Construções Técnicas XXV

D

Dial XVIII

E

Electro-Arco, Ltd.ª IV
Empresa de Cimentos de Leiria . . IX
Empresa Electro Cerâmica XXXI
Empresa de Produtos Asfálticos. . . X
Empresa de Sondagens e Fundações Teixeira Duarte, Ltd.ª . . . . . 3.ª da capa
Empresa Técnica de Equipamentos Eléctricos XI
Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações XVI

F

Fábrica Portugal II
Fanafel XVI
Fundações Franki, Lda. I

G

George Fischer III
Guedes & Almeida, Lda. VI

H

Heliaço . . . . . 2.ª da capa

I

ICI . . . . . XXII e XXIII
Isola XXIV
Ilsolux, Ld. XXVI
I. S. T. XVIII

J — Pág.

Jayme da Costa, Lda XVII
Johann Keller . . . . . 2.ª da capa

L

LISNAVE XXIV

M

MAGUE XIII
Monteiro Gomes, Lda. XX

N

Novobra, Lda. . . . . 2.ª da capa

Q

Quimicor, S.A.R.L. XIX

R

Rotring XXVII

S

Secheron Portuguesa XIV
Soc. Const. Amadeu Gaudêncio . . XXVII
Sociedade de Electricidade Brown Boveri . . . . . 4.ª da capa
Sociedade Industrial Metalúrgica . XXXI
Soc. Michaelis de Vasconcelos . . . XII
Sociedade Portuguesa Cavan . . . VIII
Sondagens e Fundações A. Cavaco . IV
Sondagens Ródio, Ltd.ª XXXI
Sopecate XXVI
Standard Eléctrica VII

T

Tudor XVIII

W

Wild Portugal, Lda. XV

GRUPO DE PRÉDIOS DA RUA SÁ DA BANDEIRA — PORTO

FUNDAÇÕES SOBRE **ESTACAS FRANKI**

FUNDAÇÕES FRANKI, L.DA

RUA BRAAMCAMP, 13-3.º — LISBOA 1 — TEL. P. P. C. 534 12/3/4 — ENDEREÇO TELEGRÁFICO: FRANKI — LISBOA

PRÉDIO SANTOS GIL, 6.º ANDAR — SALA 10 — TEL. 91167 — CAIXA POSTAL 1397

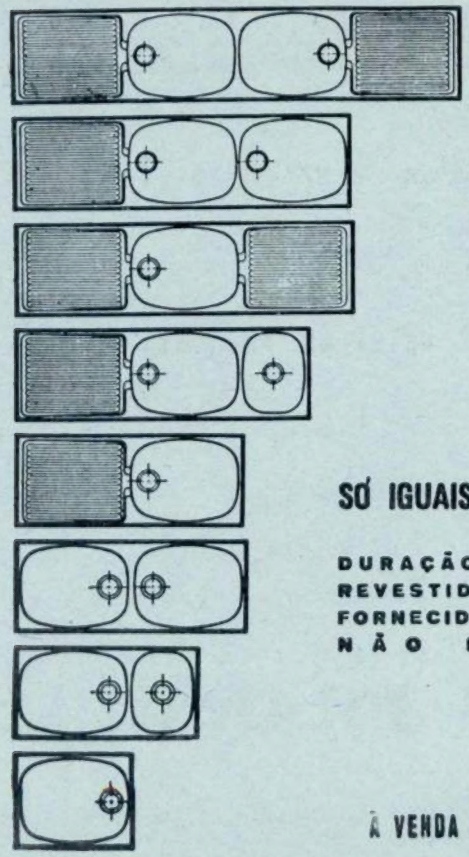
ENDEREÇO TELEGRÁFICO: FRANKI — LOURENÇO MARQUES

USE NA SUA COZINHA UM ELEGANTE LAVA-LOUÇAS DE AÇO INOXIDÁVEL

CONCEBIDO PELA

FABRICA PORTUGAL

PARA MODERNIZAR OS LARES DE PORTUGAL



APRESENTADOS EM

8 MODELOS

"STANDARD"

EXECUTAM-SE FORA DE SÉRIE, MODELOS ESPECIAIS PARA GRANDES INSTALAÇÕES

SÓ IGUAIS AOS MELHORES ESTRANGEIROS

DURAÇÃO ILIMITADA • HIGIÉNICOS
REVESTIDOS DE ISOLAMENTO ESPECIAL
FORNECIDOS COM SIFÃO DE SEGURANÇA
NÃO PARTEM A LOUÇA

À VENDA NAS BOAS CASAS DA ESPECIALIDADE

Cada areia de moldação exige um preparo individual

em marcha contínua os Multi-Mull® +GF+
Sistema Simpson

em marcha descontínua os Mix-Muller® +GF+
Sistema Simpson

Georges Fischer Sociedade Anónima, Schaffhouse (Suiça)

Telefone: (053) 5 60 31 / 5 70 31 Telegrammas: Geofischer Telescriptòr: 5 29 15 geofischer schf

GM 1298/5

Bombas centrífugas «PACIFIC»

Construídas por

Batignolles - Chatillon

Especialmente destinadas para:

— Petróleos
— Indústrias químicas
— Construções navais
— Centrais eléctricas
— Alimentação de caldeiras
— Etc., etc.

Sob as condições de funcionamento seguintes:

— Débitos: 1 m³/h a 10.000 m³/h
— Pressões: altas e baixas
— Temperaturas: −180° C + 500° C
— Líquidos: corrosivos ou não

Para estudos e orçamentos, consultar o representante em Portugal:

CIDEX — Comércio Internacional
e Representações Industriais, Lda.

Av. Casal Ribeiro, 46-2.°/Telef. 73 53 07/LISBOA 1

Pesquisas e captações de água

Sondagens

Rebaixamento de níveis aquíferos

Injecções e consolidações de terrenos

Fundações

Estacas de betão

SONDAGENS E FUNDAÇÕES A. CAVACO, LDA.

R. RODRIGO DA FONSECA, 62, R/C ESQ. — LISBOA-1
- TELEF. 73 35 45 - 5 95 62 - 55 38 73

ELECTRO-ARCO, L.DA

ELÉCTRODOS ✦ POSTOS ✦ ACESSÓRIOS
PARA A SOLDADURA ELÉCTRICA

*

ESCOLAS DE SOLDADURA

—

MATERIAL APROVADO PELOS
LLOYD'S REGISTER OF SHIPPING
BUREAU VERITAS
GERMANISCHER LLOYD

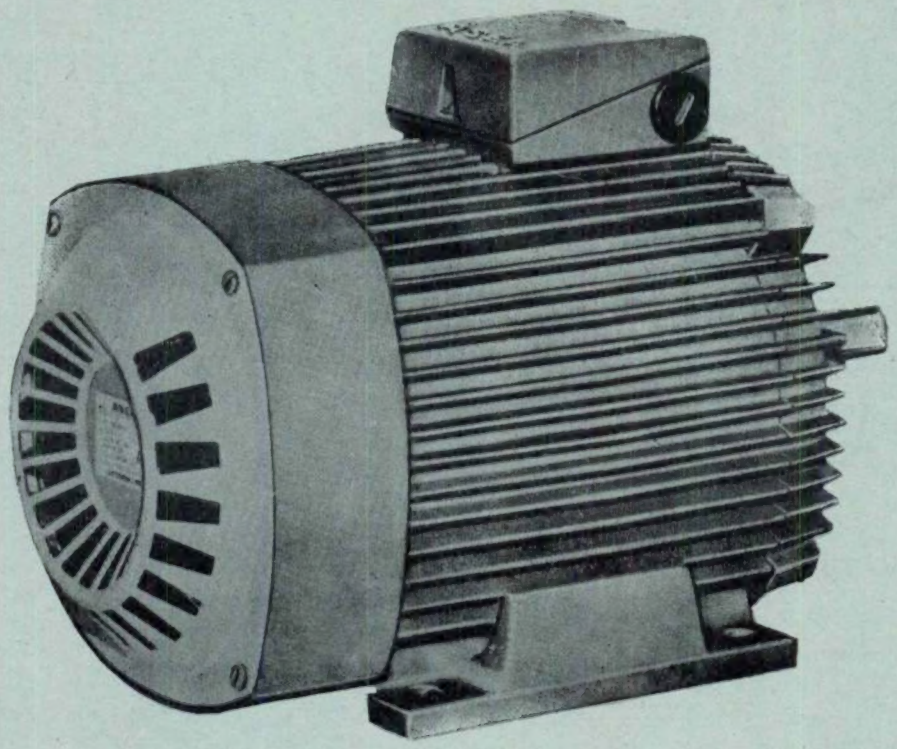
—

LISBOA
Rua Silva Carvalho, 239
Tels. 68 36 49 - 68 48 93

FÁBRICA E LABORATÓRIOS
Venda Nova — Amadora
Tels. 97 06 13 - 97 17 33

PORTO
Rua do Bolhão, 216
Tel. 2 12 77 - 39 44 73

Nova série de motores M



— agora com potências até 60 CV

Graças às suas avançadas características técnicas, o extraordinário motor trifásico ASEA de peso reduzido tem registado notável sucesso, tanto no mercado sueco como nos mercados de exportação.

o motor M - ideal para accionamentos industriais

- baixo peso
- mecânicamente robusto
- digno de confiança no serviço
- resistente à corrosão
- chumaceiras imobilizadas durante o transporte
- anel de vedação do lado da ventoinha
- excelentes características de arranque
- espaçosa caixa de terminais com duas entradas
- dimensões e potência de acordo com as normas I. E. C. e DIN
- apresentação atraente

uma força criadora no domínio da electricidade

ASEA
ELÉCTRICA, LDA.

Sede em Lisboa: R. Rodrigues Sampaio, 18-5.º
Filial no Porto: Rua do Campo Alegre, 144

MERCURY

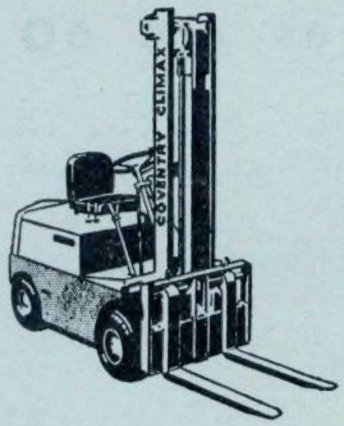
TRACTORES INDUSTRIAIS

Capacidades de reboque
até 300 Ton

COLES

GUINDASTES MÓVEIS

Capacidades até 100 Ton



Coventry Climax

EMPILHADORES

GAS ELÉCTRICOS DIESEL GASOLINA

Capacidades até 4 toneladas

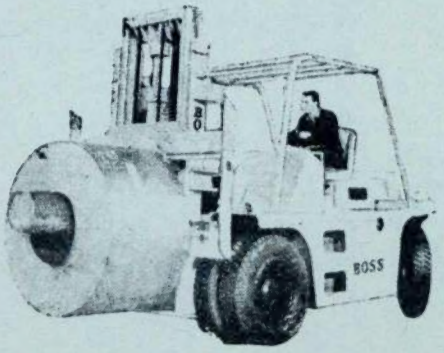
BOSS

EMPILHADORES

GÁS DIESEL GASOLINA

Capacidades até 40 Ton

GUEDES & ALMEIDA, LDA.
R. Áurea, 181-2.º — Tel. 32 78 45
LISBOA 2



Transistores, diodos de sinal e Zener, elementos rectificadores e tiristores

As Divisões da " ITT Semiconductors " fabricam elementos de selénio e silício, adequados a todos os tipos de sistemas de comunicação, comando e processamento de dados.
Além de várias linhas com centenas de tipos de semicondutores simples, a ITT vende ainda numerosas unidades com circuitos múltiplos, em ambas as versões miniatura e sub-miniatura.
Entre os componentes simples incluem-se transistores e díodos de silício e díodos zener de referência. Outros semi condutores de fabrico ITT são os díodos gold-bonded.
A ITT oferece, ainda, além de rectificadores de silício., rectificadores avalanche de silício e tiristores, a maior gama de rectificadores de selénio de toda a Europa.
Pode, também, fornecer montagens de elementos rectificadores, encapsuladas ou com placas de refrigeração, em conjuntos completos.

Para informações adicionais relativas aos semicondutores ou aos restantes componentes ITT, consulte a :

STANDARD ELÉCTRICA, S.A.R.L.
Avenida da India
Lisboa-3
Telefone : 638171
Telex : 572 MICROF P

componentes electrónicos

ITT Standard

66/15P

O EMPREGO DO CIMENTO BRANCO...

permite acabamentos mais perfeitos, mais duradouros e muito mais económicos

Estude a vantagem do emprego do

CIMENTO BRANCO LUSO

Consulte os distribuidores gerais

No Sul: **SCIAL** — T. do Corpo Santo, 15 — Telef. 66 61 86 — Lisboa
No Norte: **SCIAL** — R. do Bonjardim, 205 — Telef. 2 5779 — Porto

POSTES DE BETÃO PARA LINHAS ELÉCTRICAS
MOSAICOS E AZULEJOS
COLUNAS PARA ILUMINAÇÃO PÚBLICA
MANILHAS PARA ESGOTOS

SOCIEDADE PORTUGUESA **Carvam**

RUA D. ESTEFÂNIA, 94-A-LISBOA-1 -TELEF. 47812-50129

Companhia de Carvões e Cimentos do Cabo Mondego

CAL HIDRÁULICA CABO MONDEGO

Fábrica totalmente remodelada

As mais modernas instalações de:

Cozedura	Com ar insuflado
Hidratação	Patente portuguesa projectada e construída em Portugal
Moagem	Automática
Expedição	Máxima rapidez na ensacagem e carregamento

A maior fábrica do País

A melhor Cal

A mais barata

Expedição contínua — Dia e noite

Celulite

ISOLAMENTO
TÉRMICO DAS
CONSTRUÇÕES

PAVIMENTOS
*
TECTOS
*
PAREDES
*
CÂMARAS
FRIGORÍFICAS
*
ISOLAMENTOS
INDUSTRIAIS

Terraços e pavimentos isolados com CELULITE no edifício da Comp.ª de Seguros Fidelidade — P. das Águas Livres — Lisboa

SETH, LDA. • RUA FILIPE FOLQUE, 10-1.º • TEL. 53 01 56 — LISBOA

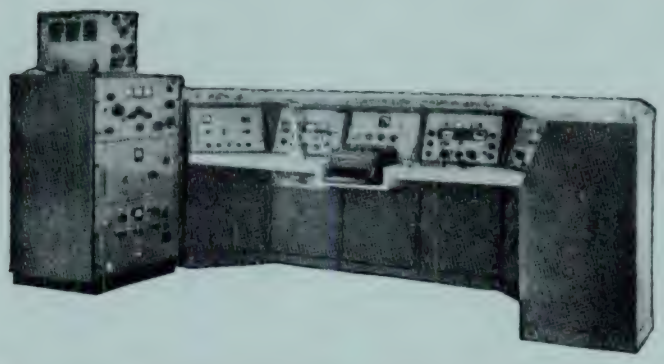
Para impermeabilizar terraços,
paredes, fundações, etc.

COLAGEM DE
TACOS DE MADEIRA

TELEF. 53 0156 TELEG. EPALDA — LISBOA

EMPREZA DE PRODUCTOS ASFÁLTICOS
IMPERMEABILISADOR
IMEPA
RUA FILIPE FOLQUE, 10-1.º - LISBOA

FÁBRICA EM SACAVÉM

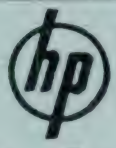


Comunicações

equipamentos
e sistemas completos

- Cuidadosamente projectados
- Amplamente experimentados
- Completamente integrados

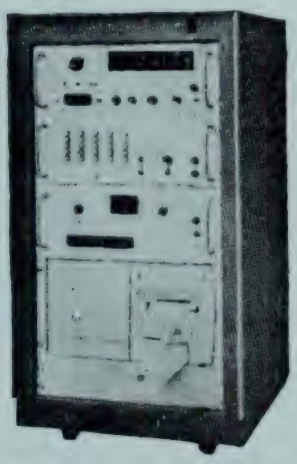
THE TECHNICAL MATERIEL CORPORATION

HEWLETT  **PACKARD**

aparelhagem electrónica de medida e registo

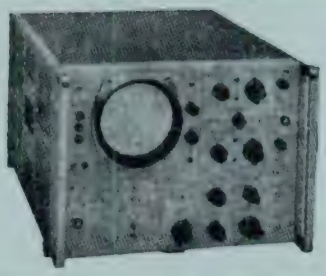
Osciloscópios, Oscilógrafos, Voltímetros electrónicos, Geradores de sinal, Contadores electrónicos, Registadores digitais, Fontes de alimentação

Registador digital Dymec



Registador Sanborn

Osciloscópio HP



Contador Electrónico HP

TELECTRA EMPRESA TECNICA DE EQUIPAMENTOS ELECTRICOS, S.A.R.L.

Novo disjuntor «Oerlikon»
de pequeno volume de óleo
Campo de tensões: 60 a 500 kV
Corrente de corte: 40 e 60 kA

Tipo **F**

Duração curta do arco independente da corrente cortada

Corte sem reescorvamento

Insensível aos defeitos quilométrico e evolutivo

Corte múltiplo

Contacto móvel accionado hidràulicamente, sem varetas ou molas

Funcionamento silencioso, reacção dinâmica insignificante

Montagem simples, sem regulações

Ateliers de Construction Oerlikon

Zurich **Suíça**

Representantes para Portugal e Ultramar:
Sociedade
Mich. de Vasconcellos, Lda.
Porto e Lisboa.

técnica

NUMERO 363 * DEZEMBRO DE 1966 * ANO XLI * VOL. XXIX * DIRECTOR: ASSIS FARINHA MARTINS

C. D. U. 536.75 : 530.12

TENSOR ENERGIA-IMPULSÃO ENTRÓPICA

por ANTÓNIO SALES LUÍS
Prof. do I. S. T.

RESUMO

Tendo induzido que, à escala relativista, os fenómenos térmicos são devidamente interpretados admitindo a existência de um momentum associado à «energia ligada» do sistema, é introduzido um novo 4-vector (4-vector impulsão entrópica) e um novo tensor (tensor energia-impulsão entrópica). Como consequências do formalismo proposto, salientam-se: a expressão relativista do segundo princípio da termodinâmica e a expressão de Einstein generalizada para os sistemas com dissipação. Além disso, admitindo-se a invariância da entropia (Planck), mostra-se que a temperatura se transforma como uma massa e não como um volume.

SYNOPSIS

After having induced that, from a relativistic point of view, thermic phenomena can be correctly interpreted by assuming the existence of a momentum connected with the «bound energy» of a system, the author introduces a new 4-vector (enthropic momentum) and a new tensor (enthropic energy – momentum tensor).

As a consequence of this formalism, the relativistic expression of the second principle of thermodynamics and Einstein's expression generalized to dissipating systems are presented.

Furthermore, assuming the invariance of the enthropy (Planck), it is shown that the temperature is transformed like a mass, not like a volume.

1) INTRODUÇÃO

Não quisemos deixar de corresponder à amável e honrosa solicitação da «Técnica», no sentido de reproduzir nas suas páginas a dissertação apresentada no concurso para Professor Catedrático de Física I do I. S. T. No entanto, afigurou-se-nos mais pertinente proceder à publicação de uma série de artigos nos quais se procurará salientar os aspectos mais importantes da nossa tese.

Como se sabe ([1]), a física, como todas as ciências da natureza, progride por duas vias diferentes:

— por um lado, a experiência que permite descobrir e analisar um número crescente de fenómenos, de factos físicos;

— por outro lado, a teoria que permite agrupar num sistema coerente os factos conhecidos e orientar a investigação experimental na pesquisa de novos factos.

Assim, a Física Teórica é desenvolvida com base em conceitos livremente criados pela mente humana. Dos factos conhecidos tenta o físico teórico induzir «princípios» a partir dos quais

([1]) V., por exemplo, A. Einstein: «L'évolution des idées en physique» e «Comment je vois le monde» (Flammarion-Paris): Louis de Broglie: «Continu et Discontinu en Physique Moderne» e «Matière et Lumière». (Éditions Albin Michel-Paris).

deduz, por uma via puramente lógica, consequências que devem ser confirmadas pela experiência; basta que uma (e uma só) dessas consequências se revele em desacordo com os factos experimentais para que se torne necessária a revisão dessa teoria.

A tese apresentada situa-se no domínio da física teórica [1]. Após uma revisão crítica construtiva da termodinâmica clássica e uma análise da sua repercussão quer no enunciado da apelidada lei de Joule quer no domínio do electromagnetismo relativista, induziu-se que os fenómenos térmicos, à escala relativista, devem ser pertinentemente interpretados, admitindo a existência de um momentum associado à energia ligada do sistema. Deste modo, introduziu-se um novo 4-vector, que se apelidou 4-vector impulsão entrópica, e um novo tensor, que se apelidou tensor energia-impulsão entrópica. Por uma via puramente lógica, deduziram-se consequências as quais, afiguram-se-nos, são coerentes com os factos físicos conhecidos.

No presente artigo, vamos introduzir esses novos tensores e analisar as consequências, reservando-se para artigos futuros a exposição da análise crítica da termodinâmica macroscópica bem como a análise mais detalhada e completa do conteúdo físico da nossa tese.

Os meios considerados são supostos destituídos de magnetização permanente e não-ferromagnéticos; além disso, considera-se que são pouco dispersivos ($\varepsilon \mu \simeq 1$). O sistema de dimensões utilizado é o sistema Gauss. Por cutro lado, utilizam-se as coordenadas:

$$x^1 = x$$
$$x^2 = y$$
$$x^3 = z$$
$$x^4 = ict$$

em que o tempo é considerado um comprimento imaginário; consequentemente, são idênticas as componentes covariantes e contravariantes de um tensor.

2) 4-VECTOR IMPULSÃO ENTRÓPICA

Considerando que o transporte de entropia resulta apenas do movimento dos sistemas elementares [1], define-se o 4-vector $\mathbf{G}_s^\alpha$ pela equação:

$$\mathbf{G}_s^\alpha = \frac{T^o S^o}{c^2} \mathbf{u}^\alpha \tag{1}$$

em que T^o e S^o estão reportados ao referencial próprio. As componentes escrevem-se:

$$\mathbf{G}_{1,2,3} = \frac{TS}{c^2} \mathbf{u}_{x,y,z} \tag{2}$$

$$\mathbf{G}_4 = \frac{i}{c} TS \tag{3}$$

em que, de acordo com as leis de transformação de um 4-vector, é:

$$TS = \frac{T^o S^o}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \tag{4}$$

Como se vê, a quarta componente é, à parte o factor i/c, a energia ligada TS. As componentes espaciais representam as componentes ordinárias do momentum linear entrópico. No referencial próprio é:

$$\mathbf{G}^o{}_{1,2,3} = 0 \tag{2a}$$

$$\mathbf{G}^o{}_4 = \frac{i}{c} T^o S^o \tag{3a}$$

o que, em parte, explica o motivo por que, à física clássica, não se revela a existência deste momentum. O módulo vale:

$$|\mathbf{G}^\alpha|^2 = -\frac{(T^o S^o)^2}{c^2} \tag{1b}$$

3) DENSIDADE ENTRÓPICA E ENTROPIA ESPECÍFICA

No referencial próprio, a entropia por unidade de massa (entropia específica) escreve-se:

$$s^o{}_m = \frac{S^o}{m^o} \tag{5}$$

e a entropia por unidade de volume (densidade de entropia):

$$s^o = \frac{S^o}{v^o} \tag{6}$$

[1] Sales Luis «A Expressão Relativista do 2.º Princípio da Termodinâmica» — Tese (1965).

[1] Temperatura uniforme ($E^a = o$) e sistema em equilíbrio térmico com o exterior.

sendo m^o e v^o, respectivamente, a massa própria e o volume próprio de um sistema elementar, suposto fisicamente pequeno. Então, como:

$$m = \frac{m^o}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \tag{7}$$

$$v = v^0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \tag{8}$$

resulta para um referencial equivalente:

$$T\, s_m = \frac{T\, S}{m} = T^o\, s^o_m \tag{9}$$

e

$$T\, s = \frac{T\, S}{v} = \frac{T^o\, s^0}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \tag{10}$$

tendo tido em conta a lei de transformação (4)

4) TENSOR ENERGIA-IMPULSÃO ENTRÓPICA

Por definição o tensor energia-impulsão entrópica é:

$$\mathbf{S}^{\beta}_{\alpha} = \frac{T^o\, s^o}{c^2}\, \mathbf{u}_{\alpha}\, \mathbf{u}^{\beta} \tag{11}$$

o que, atendendo a (10) e às componentes do 4-vector velocidade, evidencia serem as suas componentes representadas pela matriz:

$$\mathbf{S}^{\beta}_{\alpha} = \begin{matrix} \mathbf{S}_{xx} & \mathbf{S}_{xy} & \mathbf{S}_{xz} & \frac{i}{c}\, T\, s\, \mathbf{u}_x \\ \mathbf{S}_{yx} & \mathbf{S}_{yy} & \mathbf{S}_{yz} & \frac{i}{c}\, T\, s\, \mathbf{u}_y \\ \mathbf{S}_{zx} & \mathbf{S}_{zy} & \mathbf{S}_{zz} & \frac{i}{c}\, T\, s\, \mathbf{u}_z \\ \frac{i}{c}\, T\, s\, \mathbf{u}_x & \frac{i}{c}\, T\, s\, \mathbf{u}_y & \frac{i}{c}\, T\, s\, \mathbf{u}_z & -T\, s \end{matrix} \tag{12}$$

em que:

$$\mathbf{S}_{kk} = \frac{T\, s}{c^2}\, \mathbf{u}_k\, \mathbf{u}_k \tag{12 a}$$

$$\mathbf{S}_{kl} = \frac{T\, s}{c^2}\, \mathbf{u}_k\, \mathbf{u}_l = \mathbf{S}_{lk} \tag{12 b}$$

O tensor é simétrico. Àparte o sinal, a densidade de energia ligada é igual à componente $\mathbf{S}^4_4$ desse tensor. A teoria da relatividade sugere definir a densidade de corrente da energia entrópica por:

$$\sum\nolimits_s = T\, s\, \mathbf{u} \tag{12 c}$$

e uma densidade de impulsão entrópica por:

$$\mathbf{g}_s = \frac{\sum_s}{c^2} = \frac{T\, s}{c^2}\, \mathbf{u} \tag{12 d}$$

A primeira verificação a que devemos submeter a validade deste tensor é que a lei de transformação da componente $\mathbf{T}^4_4$ deve conduzir a (10):

$$T\, s = \frac{T^o\, s^o}{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

Fácil é de ver que assim é. Na verdade:

$$\mathbf{S}'^{44} = \left(\frac{-i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 \frac{T\, s\, \mathbf{u}^2_x}{c^2} + 2\, \frac{(-i\beta)}{1-\beta^2}\, \frac{i}{c}\, T\, s\, \mathbf{u}_x + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 (-T\, s)$$

ou

$$-T'\, s' = -T\, s\, \frac{\left(1 - \frac{v\, \mathbf{u}_x}{c^2}\right)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{13}$$

Mas da lei de transformação da quarta componente do 4-vector velocidade, sabe-se que:

$$\frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} = \frac{1 - \frac{v\, \mathbf{u}_x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{14}$$

pelo que, substituindo (14) em (13), se obtém:

$$T'\, s' \left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right) = T\, s \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = T'^o\, s^o \tag{15}$$

como se pretendia.

A segunda verificação é que a quarta componente da divergência deste tensor deve estar relacionada com a produção de entropia. Na verdade, de (12), resulta que:

$$\sum_{\beta} \frac{\partial \mathbf{S}_4^{\beta}}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial \left(\frac{i}{c} Ts\mathbf{u}_x \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\frac{i}{c} Ts\mathbf{u}_y \right)}{\partial y} +$$

$$+ \frac{\partial \left(\frac{i}{c} Ts\mathbf{u}_z \right)}{\partial z} + \frac{\partial - (Ts)}{i c \partial t}$$

$$= \frac{i}{c} \left\{ \operatorname{div} (Ts\mathbf{u}) + \frac{\partial (Ts)}{\partial t} \right\}$$

ou, como a temperatura é uniforme:

$$\sum_{\beta} \frac{\partial \mathbf{S}_4^{\beta}}{\partial x^{\beta}} = \frac{i}{c} \left\{ T \operatorname{div} (s\mathbf{u}) + T \frac{ds}{dt} + s \frac{dT}{dt} \right\} \quad (16)$$

A equação clássica do segundo princípio escreve-se:

$$T\sigma = T \frac{\partial s}{\partial t} + T \operatorname{div} (s\mathbf{u}) \quad (17)$$

o que, comparado com (16), evidencia haver identidade entre essas expressões, àparte a última parcela do segundo membro de (16):

$$s \frac{\partial T}{\partial t}$$

No caso particular que estamos a considerar, essa parcela é nula, pois o sistema está em equilíbrio térmico com o exterior; consequentemente, a identidade é perfeita.

Em face do exposto, podemos, então, afirmar que a quarta componente da divergência do tensor energia-impulsão entrópica representa, àparte o factor $\frac{i}{c}$, a quantidade $T\sigma$ em que σ é a produção de entropia por unidade de volume e de tempo:

$$\sum_{\beta} \frac{\partial \mathbf{S}_4^{\beta}}{\partial x^{\beta}} = \frac{i}{c} T\sigma \quad (18)$$

Como a produção de entropia é essencialmente não negativa, resulta de (18) que [1]:

$$i c \sum_{\beta} \frac{\partial \mathbf{S}_4^{\beta}}{\partial x^{\beta}} \leqslant 0 \quad (19)$$

expressão esta que traduz, de uma forma covariante, o enunciado de Prigogine; o sinal de igualdade verifica-se para transformações reversíveis.

5) EXPRESSÃO RELATIVISTA DO SEGUNDO PRINCÍPIO DA TERMODINÂMICA

Da física relativista, sabe-se que, no caso de um sistema estar electrizado e imerso num campo electromagnético de tal modo que as forças de natureza electromagnética são as únicas forças aplicadas, se verifica a relação:

$$- \frac{i}{c} (\mathbf{J} . \mathbf{E}^*) = \sum_{\beta} \left(\frac{\partial \mathbf{M}_4^{\beta}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial \mathbf{T}_4^{\beta}}{\partial x^{\beta}} \right) \quad (20)$$

em que:

$\mathbf{M}_{\alpha}^{\beta}$ ... tensor energia-impulsão mecânica

$\mathbf{T}_{\alpha}^{\beta}$ ... tensor energia-impulsão electromagnética

$\mathbf{J}$ ... 3-vector densidade de corrente

$\mathbf{E}^*$ ... $= \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u} \wedge \mathbf{B}]$

Do estudo crítico realizado, concluimos que a quantidade $(\mathbf{J}.\mathbf{E}^*)$ está relacionada com a produção de entropia σ, por unidade de volume e de tempo, pela relação:

$$T\sigma = (\mathbf{J}.\mathbf{E}^*) \quad (21)$$

Então, atendendo a que:

$$(\mathbf{J}.\mathbf{E}^*) = (\mathbf{J}^o.\mathbf{E}') \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \quad (22)$$

vem:

$$T\sigma = T^o \sigma^o \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \quad (23)$$

Por outro lado, substituindo (21) em (20) obtém-se:

$$- \frac{i}{c} T\sigma = \sum_{\beta} \left(\frac{\partial \mathbf{M}_4^{\beta}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial \mathbf{T}_4^{\beta}}{\partial x^{\beta}} \right) \quad (24)$$

Então, atendendo a que o tensor $\mathbf{S}_{\alpha}^{\beta}$ satisfaz à relação (18):

$$\sum_{\beta} \frac{\partial \mathbf{S}_4^{\beta}}{\partial x^{\beta}} = \frac{i}{c} T\sigma \quad (25)$$

(1) Considera-se que T é essencialmente positiva.

resulta que:

$$\sum_{\beta} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} (\mathbf{M}_4^{\beta} + \mathbf{T}_4^{\beta} + \mathbf{S}_4^{\beta}) = 0 \qquad (26)$$

Apelidando, então, tensor de energia-impulsão total a soma desses três tensores, verifica-se haver conservação da quarta componente do tensor energia-impulsão total.

A equação (26), complementada pela condição expressa pela equação (19), constitui a expressão relativista, proposta, do segundo princípio da termodinâmica.

O tensor energia-impulsão entrópica foi introduzido em ligação com um conjunto de restrições impostas ao sistema e ao meio. No entanto, a natureza da propria exposição sugere que a validade da equação de definição (11) é geral, assim como a da equação (18); òbviamente, a produção de entropia inclui, no caso geral, a densidade de actividade dos diferentes campos aplicados.

6) COMPONENTES ESPACIAIS DA DIVERGÊNCIA DO TENSOR ENERGIA-IMPULSÃO TOTAL

Como se sabe, se os meios forem pouco dispersivos ($\varepsilon\mu \cong 1$), o tensor energia-impulsão electromagnética é simétrico e, consequentemente, compensam-se as componentes espaciais da divergência dos tensores energia-impulsão electromagnética e mecânica:

$$\sum_{\beta} \frac{\partial \mathbf{T}_{\alpha}^{\beta}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial \mathbf{M}_{\alpha}^{\beta}}{\partial x^{\beta}} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, 3) \qquad (27)$$

Os factos expostos induzem haver conservação do tensor energia-impulsão total:

$$\sum_{\beta} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \left(\mathbf{T}_{\alpha}^{\beta} + \mathbf{M}_{\alpha}^{\beta} + \mathbf{S}_{\alpha}^{\beta} \right) = 0 \qquad (28)$$

$$(\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

pelo que:

$$\sum_{\beta} \frac{\partial \mathbf{S}_{\alpha}^{\beta}}{\partial x^{\beta}} = 0 \qquad (29)$$

$$(\alpha = 1, 2, 3)$$

isto é, na hipótese considerada (meios pouco dispersivos) há conservação da densidade de impulsão da energia ligada.

A equação (28) revela que a união formal dos princípios de conservação da impulsão e da energia que a teoria da relatividade faz prever e que já havia sido estabelecida no caso do vácuo e da teoria dos electrões, é, com o tensor energia-impulsão entrópica, generalizada para o caso da matéria ponderável.

7) LEI DE TRANSFORMAÇÃO DA TEMPERATURA

Admitindo, então, com Planck [1] a invariância da entropia:

$$S = S' = S^{o}$$

da equação (4):

$$TS = \frac{T^{o} S^{o}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

resulta que:

$$T = \frac{T_{o}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \qquad (30)$$

Quer dizer, a temperatura transforma-se como uma massa o que, afigura-se-nos, é mais coerente que a lei apresentada por von Laue e Tolman, segundo a qual a temperatura transforma-se como um volume.

---

[1] — M. Planck, Berl. Ber (1907) 542 e Ann. der Physik 26 (1908), 1.

TÉCNICA 362

Por lapso, a primeira página deste número da «Técnica» escapou à revisão, pelo que aparecem nela diversas gralhas.

Pelo facto apresentamos as nossas desculpas.

C. D. U. 621.311.5/95

ELEMENTOS SOBRE A PRODUÇÃO E O CONSUMO DE ENERGIA NA REDE ELÉCTRICA NACIONAL (*)

OUTUBRO

I — Breve nota mensal

O regime de Outubro apresentou-se muito acima da média por efeito das elevadas precipitações registadas ao longo do mês, as quais atingiram cerca do triplo dos valores normais. As afluências ao conjunto de todos os aproveitamentos, exceptuados os do Douro, situam-se na zona dos regimes extremos, sendo a respectiva probabilidade de serem excedidas da ordem dos 4 %; a probabilidade de as afluências à totalidade do sistema produtor serem excedidas é, porém, superior (da ordem dos 7 %), o que resultou de grande parte das afluências naturais do Esla, durante o mês de Outubro, ter ficado retida na albufeira de Ricobayo. O coeficiente de produtibilidade hidroeléctrica do mês atingiu 1,84.

II — Elementos gerais (GWh)

	a) Mensais 1965	a) Mensais 1966	Variação %
Produção hidráulica (P_h) . . .	2938,9	4205,1	+ 43
Produção térmica (P_t)	392,3	5,0	— 99
Produção total (P_T)	3331,2	4210,1	+ 26
Energia recebida de empresas não pertencentes ao RNC (E_r)	19,5	28,1	+ 44
Exportações (Ex)	6,0	14,4	+ 140
Importações (I)	441,3	3,0	— 99
Saldo importador (S_I)	+ 425,3	— 11,4	— 103
Consumo em bombagem (C_D) . .	6,8	46,7	+ 587
Produção para consumos perman. (P_{cp}) (1) . .	3390,6	3530,5	+ 4,1
Produção para consumos não perman. (P_{cnp}) . . .	388,6	649,8	+ 67
Total	3786,0	4226,8	+ 12
Coeficiente de hidraulicidade	0,74	1,49	—

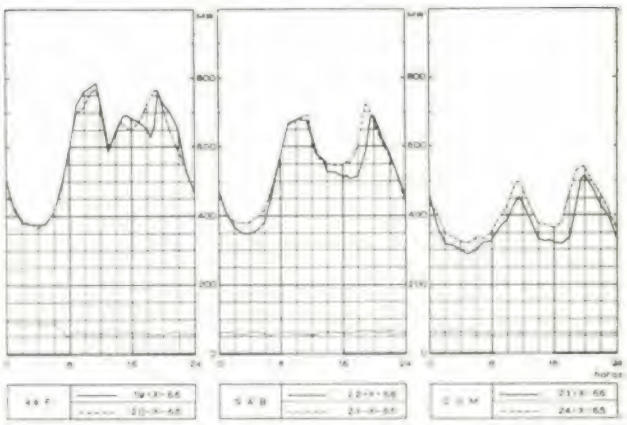
NOTA

(1) A produção para consumos permanentes (P_{cp}) é determinada pela seguinte expressão: $P_{cp} = P_T + E_r + S_I - C_D - P_{cnp}$

III — Diagramas de carga dos dias característicos

			4.ª feira: 1965	4.ª feira: 1966
Produção hidráulica		(P_h) MWh	14275	15074
Produção térmica		(P_t) MWh	0	0
Produção total		(P_T) MWh	14275	15074
Trocas com Espanha	Export.	(Ex) MWh	30	610
	Import.	(I) MWh	80	30
Consum em bomb. hidroel.		(C_b) MWh	0	0
Prod. para cons. perm.		(P_{cp}) MWh	11960	12981
Prod. para cons. não perm.		(P_{cnp}) MWh	2365	1513
TOTAL		$P_T + (I-Ex)$ MWh	14325	14494
Características dos diagramas	$P_T + (I-Ex)$	Potência máx. MW	768	789
		Potência mín. MW	364	376
		Utiliz. da ponta horas	18,7	18,4
		Factor de carga	0,78	0,77
	P_{cp}	Potência máx. MW	668	732
		Potência mín. MW	261	285
		Utiliz. da ponta horas	17,9	17,7
		Factor de carga	0,75	0,74

3.3 - DIAGRAMAS DE CARGA DOS DIAS CARACTERÍSTICOS $P_T+(I-Ex)-C_b$



IV — Energia armazenada nas principais albufeiras

Albufeiras:	No fim do mês GWh	No fim do mês % (1)
Alto Rabagão	693,1	71,2
Paradela	165,1	74,2
Venda Nova	119,7	93,5
Salamonde	23,2	84,1
Caniçada	31,2	94,3
Vilar	0,0	0,0
Cabril	158,2	46,6
Castelo do Bode	116,0	71,2
Guilhofrei	5,2	62,7
Lagoa Comprida	11,0 (2)	26,2
Santa Luzia	32,7	53,1
Pracana	9,9	76,7
Póvoa	4,4 (3)	24,0
Total { com A. Rabagão . . .	1369,7	65,0
Total { sem A. Rabagão . . .	676,6	59,1

NOTAS

(1) Coeficiente de enchimento em energia das albufeiras.

(2) Inclui 1,6 GWh armazenados em Vale do Rossim no início do mês e 3,3 GWh no fim do mês.

(3) Inclui 1,8 GWh armazenados no açude do Poio no início do mês e 1,9 GWh no fim do mês.

(*) *Elementos extraídos das estatísticas mensais do Repartidor Nacional de Cargas (R. N. C.). As produções e os consumos das empresas do R. N. C. representam cerca de 94 % dos totais do País.*

MAGUE

GUINDASTE DE

50 t / 30 m
20 t / 48 m
6 t / 53 m

EM SERVIÇO NOS NOVOS

ESTALEIROS NAVAIS DE LISBOA

(LISNAVE)

A MAIOR UNIDADE TOTALMENTE PROJECTADA E CONSTRUÍDA ATÉ AGORA EM PORTUGAL

PONTES ROLANTES, GUINDASTES E APAR. DE ELEVAÇÃO ESPECIAIS — *Projecto e fabrico*
TURBINAS HIDRÁULICAS — *Fabrico segundo licença de A. C. M. de Vevey, S. A.*
TURBINAS A VAPOR — *Fabrico segundo licença de Brown Boveri, Cie.*
CALDEIRAS A VAPOR — *Projecto e fabrico segundo licença de Foster Wheeler, Co.*
EQUIPAMENTOS E INSTALAÇÕES INDUSTRIAIS

CONSTRUÇÕES METALOMECANICAS **MAGUE** S.A.R.L.

ALVERCA DO RIBATEJO — PORTUGAL

É que viver sem ela seria impossível! Hoje constitui uma fundamental na vida quotidiana. O telefone, a rádio, a televisão, são alimentadas por ela.
De noite as cidades iluminam-se e a vida torna-se mais confortável graças à energia produzida por alternadores.

SEPSA

SECHERON PORTUGUESA, fabricante Nacional
de grandes máquinas eléctricas rotativas

C. D. U. 624.072.2

VIGAS EM CONSOLA

por J. S. BRASÃO FARINHA
Engenheiro Civil

RESUMO

Cálculo de flechas de vigas em consola, de eixo rectilíneo e momento de inércia constante ou variável, através da consideração de vigas encastradas num dos extremos e apoiadas no outro, o qual sofre um deslocamento vertical. Cálculo das flechas através do método geral, considerando também o caso de vigas de eixo circular.

SYNOPSIS

The calculation of the deflection in cantilever beams with rectilineal axis and constant or variable inertia is accomplished by considering a beam with one of its extremes fixed and the other freely supported, this latter suffering a vertical displacement.

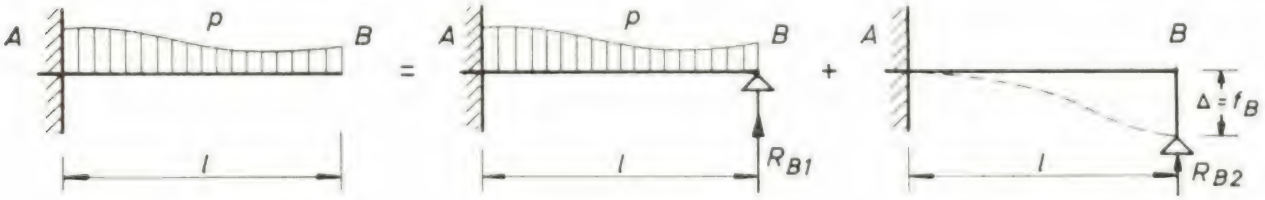
It is also used the general method to calculate deflections, the case of circular axis beams being considered.

Com o nome de «consolas» designam-se as vigas encastradas num dos extremos e livres no outro.

Tais vigas constituem sistemas isostáticos, apresentando-se a seguir tabelas aplicáveis a estas vigas incluindo a indicação das expressões para cálculo das flechas no extremo livre B em diversas hipóteses.

1 — CONSOLAS DE EIXO RECTILÍNEO E MOMENTO DE INÉRCIA CONSTANTE

A tabela 1 considera várias hipóteses de carga, sendo a flecha f_B no extremo livre B determinada pela seguinte expressão figurada, fazendo $R_{B1} + R_{B2} = 0$; em que $R_{B2} = -\frac{3EI}{l^3} f_B$ não depende da hipótese de carga, indicando as «Tabelas Técnicas» o valor de R_{B1} para muitos tipos de cargas actuantes.



Exemplo 1 — Para uma carga p uniformemente distribuída ao longo de todo o vão (caso 4 da tabela 1) será $\frac{3}{8} pl - \frac{3EI}{l^3} f_B = 0$

donde se tira

$$f_B = \frac{pl^4}{8EI}$$

Exemplo 2 — No caso da carga P concentrada em B será $R_{B1} = P$ donde $f_B = \frac{Pl^3}{3EI}$

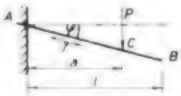
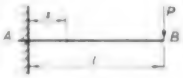
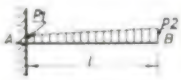
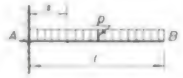
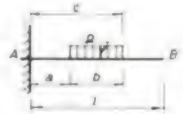
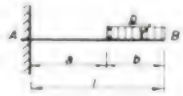
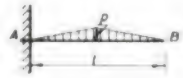
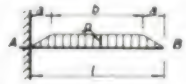
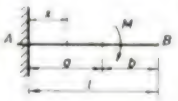
2 — CONSOLAS DE EIXO RECTILÍNEO E MOMENTO DE INÉRCIA VARIÁVEL

O princípio atrás referido é naturalmente aplicável, sendo $R_{B2} = -\frac{mEI_B}{l^3} f_B$ em que m é um número variável com o caso particular de variação de I. Será possível encontrar tabelas que indiquem os valores de R_{B1} e R_{B2} para algumas hipóteses correntes de variação do momento de inércia de vigas de secção rectangular, como as apresentadas por P. Charon em «Le calcul pratique des constructions à inertie variable». Neste livro se colheram os elementos com que foi elaborada a tabela 2, onde se indicam os valores de m que permitem o cálculo imediato das flechas na extremidade livre das consolas consideradas nessa tabela.

TABELA 1

Vigas em consola

(Momento de inércia constante)

TIPO DE CARGA	REACÇÃO DE APOIO R MOMENTO FLECTOR M FLECHA f	TIPO DE CARGA	REACÇÃO DE APOIO R MOMENTO FLECTOR M FLECHA f
	$R_A = P$; $M_A = -Pa$ Esforço normal (tracção) $T = P \operatorname{sen} \varphi$ (para $x < a$) $f_C = \frac{Pa^3}{3EI} + a \operatorname{tg} \varphi$ $f_B = \frac{Pa^2}{6EI}(3l - a) + l \operatorname{tg} \varphi$		$R_A = \frac{pl}{2}$ $M_A = -\frac{pl^2}{3}$ $f_B = \frac{11}{120} \frac{pl^4}{EI}$
	$R_A = P$, $M_A = -Pa$ $M_x = -P(a-x)$ para $x < a$ $M_x = 0$ para $x > a$ $f_B = \frac{Pa^2(3l-a)}{6EI}$		$R_A = \frac{pl}{2}$ $M_A = -\frac{pb}{6}(2b + 3a)$ $f_B = \frac{pb}{120EI}(20l^3 - 10bl^2 + b^3)$
	$R_A = P$ $M_x = -P(l-x)$ $M_A = -Pl$ $f_B = \frac{Pl^3}{3EI}$		$R_A = \frac{l}{2}(p_1 + p_2)$ $M_A = -\frac{l^2}{6}(2p_2 - p_1)$ $f_B = \frac{4p_1 + 11p_2}{120EI} l^4$
	$R_A = pl$ $M_x = -\frac{p}{2}(l-x)^2$ $M_A = -\frac{pl^2}{2}$ $f_B = \frac{pl^4}{8EI}$		$R_A = \frac{pl}{2}$ $M_A = -\frac{pl^2}{6}$ $f_B = \frac{pl^4}{30EI}$
	$R_A = pb$ $M_A = -\frac{pb}{2}(2a + b)$ $f_B = \frac{p}{24EI}\left[4l(c^3 - a^3) - (c^4 - a^4)\right]$		$R_A = \frac{pa}{2}$ $M_A = -\frac{pa^2}{6}$ $f_B = \frac{pa^3}{120EI}(5b + 4a)$
	$R_A = pb$ $M_A = -\frac{pb}{2}(2a + b)$ $f_B = \frac{pl}{24EI}(8l^3 - 6bl^2 + b^3)$		$R_A = \frac{l}{2}(p_1 + p_2)$ $M_A = -\frac{l^2}{6}(2p_1 + p_2)$ $f_B = \frac{11p_1 + 4p_2}{120EI} l^4$
	$R_A = \frac{pl}{2}$ $M_A = -\frac{pl^2}{4}$ $f_B = \frac{11pl^4}{192EI}$		$R_A = \frac{2}{3}pl$ $M_A = -\frac{pl^2}{3}$ $f_B = \frac{7pl^4}{90EI}$
	$R_A = p(a + b)$ $M_A = -\frac{pl}{4}(l + b)$ $f_B = \frac{pl}{24EI}\left[3l^3 - 2a(2l - a) - a^3\right]$		$R_A = 0$ $M_A = -M$; M_x (para $x < a$) $M_x = 0$ (para $x > a$) $f_B = \frac{Ma}{2EI}(a + 2b)$

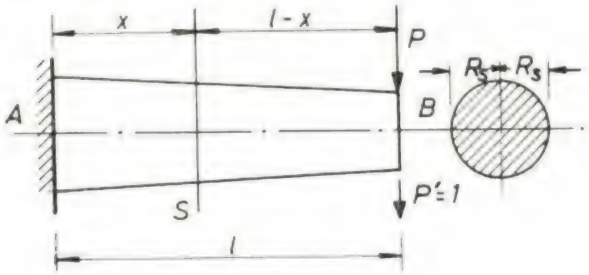
O método geral para a resolução destes casos é traduzido pela expressão

$$f = -\int_0^l \frac{M\,m}{EI}\,dx$$

em que M é o momento das cargas aplicadas e m é o momento em relação a qualquer secção da viga devido a uma carga concentrada $P' = 1$ na secção em relação à qual se pretende determinar a flecha, e com a direcção desta. No caso

de dificuldade de resolução do integral, existe sempre o recurso à integração numérica.

Exemplo 3 — Determinar a flecha na extremidade de uma consola de secção circular, variando linearmente o diâmetro entre o valor máximo no encastramento e o valor mínimo no extremo livre.



Na hipótese de carga P concentrada a flecha na extremidade B determina-se como segue

Entre $x = 0$ e $x = l$ $\quad M = -P(l - x)$
Ao longo da viga $\quad m = -(l - x)$

teremos

$$f_B = -\int_0^l \frac{P(l-x)^2}{E I_x}\,dx \qquad I_x = \frac{\pi R_x^4}{4}$$

$$R_x = R_A - \frac{x}{l}(R_A - R_B) = R_A(1 - kx)$$

em que

$$k = \frac{1}{l}\left(1 - \frac{R_B}{R_A}\right)$$

$$I_x = I_A(1 - kx)^4$$

$$f_B = -\frac{P}{EI_A}\int_0^l \frac{(l-x)^2}{(1-kx)^4} =$$

$$= -\frac{P}{EI_A}\left[\frac{(l-x)^3}{3(kl-1)(1-kx)^3}\right]_0^l =$$

$$= \frac{Pl^3}{3EI_A}\,\frac{R_B}{R_A} = \alpha\,\frac{Pl^3}{EI_A}$$

Exemplo 4 — Considerar, no exemplo anterior, a actuação da carga uniformemente distribuída.

Será agora $M = -\dfrac{p(l-x)^2}{2}$, $m = -(l - x)$

donde

$$f_B = -\frac{p}{2EI_A}\int_0^l \frac{(l-x)^3}{(1-kx)^4}\,dx =$$

$$= -\frac{p}{2EI_A}\left\{\frac{(l-x)^3}{3k(1-kx)^3} + \frac{(l-x)^2}{2k^2(1-kx)} + \right.$$

$$\left. + \frac{l-x}{k^3(1-kx)} - \frac{1}{k^4}\log_e(1-kx)\right\}_0^l =$$

$$= \frac{p}{2EI_A k^4}\left[\log_e(1-kl) + \frac{l^3k^3}{3} + \right.$$

$$\left. + \frac{l^2k^2}{2} + lk\right] =$$

$$= \frac{pl^4}{2EI_A\left(1 - \frac{R_B}{R_A}\right)^4}\left[\log_e\frac{R_B}{R_A} + \right.$$

$$+ \frac{1}{3}\left(1 - \frac{R_B}{R_A}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{R_B}{R_A}\right)^2 +$$

$$\left. + \left(1 - \frac{R_B}{R_A}\right)\right] = \beta\,\frac{pl^4}{EI_A}$$

Nota: Os exemplos 3 e 4 e alguns mais relativos à consola de altura linearmente variável incluindo a secção circular oca são apresentados e resolvidos por Alfio Seni em «Le calcul des flèches des consoles à section variable», Beton Armé n.º 22, Março 1960.

3 — CONSOLAS DE EIXO CIRCULAR E MOMENTO DE INÉRCIA CONSTANTE

O momento flector é determinado isostàticamente, e os deslocamentos da extremidade B são calculados pela expressão atrás indicada no § 2, que é válida quando as dimensões transversais da viga são pequenas em comparação com o raio de curvatura da linha média da viga.

As expressões a seguir deduzidas são aplicáveis quaisquer que sejam os valores de α e de ψ e indicam valores simplificados para duas hipóteses limites $\alpha = 0$ (extremidade livre B na horizontal do centro 0 do arco de circunferência eixo da viga) e $\psi = 90°$ (encastramento A na vertical de 0).

É de notar que cada secção S da viga deformada sob acção das cargas aplicadas sofre um deslocamento oblíquo com duas componentes, vertical f_y e horizontal f_x. A componente f_y é considerada positiva quando é medida para baixo e f_x é positiva quando é medida no sentido do centro 0.

TABELA 2

Vigas em consola com esquadro

(Secção rectangular)

Hipótese de carga — Flecha em B: $f_B = \frac{p\,l^3}{m\,E\,I_B}$ — Variação do momento de inércia (Secção rectangular)

I_B/I_A \ a/l	0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
0.00	3.00	3.50	4.11	4.88	5.86	7.11	8.75	10.92	13.89	18.03	24.00	46.87	111.1	375.0	3000	∞
0.005	3.00	3.44	3.98	4.63	5.42	6.40	7.63	9.18	11.17	13.73	17.10	27.57	46.80	81.56	135.6	193.0
0.01	3.00	3.43	3.94	4.55	5.29	6.20	7.31	8.70	10.43	12.61	15.39	23.49	36.74	57.22	84.05	109.4
0.02	3.00	3.40	3.88	4.45	5.12	5.96	6.92	8.09	9.53	11.36	13.44	19.24	27.61	38.76	51.20	62.49
0.03	3.00	3.39	3.84	4.38	5.00	5.76	6.63	7.68	8.93	10.50	12.20	16.84	22.93	30.30	38.23	45.04
0.04	3.00	3.37	3.81	4.32	4.90	5.60	6.40	7.35	8.47	9.77	11.30	15.11	19.92	25.52	31.05	35.94
0.05	3.00	3.36	3.78	4.27	4.82	5.46	6.22	7.08	8.10	9.30	10.60	13.81	17.76	22.12	26.42	30.12
0.06	3.00	3.35	3.75	4.22	4.74	5.35	6.06	6.85	7.79	8.84	10.03	12.85	16.16	19.70	23.15	26.04
0.08	3.00	3.33	3.71	4.14	4.62	5.16	5.79	6.48	7.28	8.14	9.14	11.34	13.83	16.40	18.78	20.74
0.10	3.00	3.32	3.67	4.07	4.52	5.02	5.57	6.20	6.88	7.65	8.46	10.27	12.24	14.16	15.98	17.45
0.12	3.00	3.30	3.64	4.02	4.42	4.88	5.38	5.94	6.55	7.22	7.92	9.44	11.04	12.60	13.99	15.15
0.15	3.00	3.28	3.59	3.93	4.30	4.71	5.15	5.61	6.14	6.70	7.27	8.48	9.70	10.87	11.89	12.74
0.20	3.00	3.25	3.52	3.82	4.14	4.48	4.84	5.22	5.62	6.04	6.47	7.34	8.18	8.97	9.64	10.20
0.30	3.00	3.20	3.42	3.64	3.88	4.13	4.38	4.64	4.90	5.18	5.43	5.94	6.41	6.85	7.18	7.47
0.40	3.00	3.17	3.34	3.50	3.68	3.86	4.05	4.22	4.41	4.59	4.75	5.08	5.36	5.62	5.83	6.00
0.50	3.00	3.13	3.26	3.39	3.52	3.66	3.78	3.92	4.03	4.16	4.27	4.48	4.66	4.82	4.96	5.07
0.60	3.00	3.10	3.20	3.29	3.39	3.48	3.58	3.66	3.75	3.84	3.90	4.05	4.16	4.27	4.34	4.40
0.70	3.00	3.07	3.14	3.20	3.28	3.34	3.40	3.46	3.51	3.57	3.61	3.70	3.77	3.83	3.88	3.92
0.80	3.00	3.05	3.09	3.13	3.18	3.22	3.25	3.28	3.31	3.34	3.37	3.42	3.46	3.50	3.52	3.55
0.90	3.00	3.02	3.04	3.06	3.08	3.10	3.12	[illegible]	3.14	3.16	3.17	3.19	3.21	3.22	3.24	3.24

Hipótese de carga — Flecha em B: $f_B = \frac{p\,l^4}{m\,E\,I_B}$ — Variação do momento de inércia (Secção rectangular)

I_B/I_A \ a/l	0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
0.00	8.00	9.83	12.18	15.32	19.52	25.28	33.35	44.81	61.73	87.48	127.93	312.5	987.6	4980	78950	∞
0.005	8.00	9.61	11.66	14.25	17.56	21.88	27.55	35.09	45.19	58.83	77.62	138.3	248.1	410.9	585.5	716.7
0.01	8.00	9.56	11.50	13.91	16.98	20.92	25.91	32.46	40.89	51.94	66.28	108.2	172.6	253.1	329.4	386.6
0.02	8.00	9.45	11.26	13.50	16.23	19.73	23.95	29.21	35.88	44.36	54.22	80.81	115.1	151.6	184.2	210.4
0.03	8.00	9.41	11.09	13.20	15.70	18.83	22.56	27.13	32.67	39.56	47.14	66.69	89.36	112.3	132.2	147.5
0.04	8.00	9.34	10.98	12.95	15.26	18.12	21.48	25.55	30.30	35.88	42.40	57.63	74.63	91.11	104.7	115.5
0.05	8.00	9.30	10.87	12.73	14.92	17.53	20.62	24.22	28.47	33.39	38.73	51.07	64.39	76.81	87.11	95.44
0.06	8.00	9.26	10.75	12.54	14.59	16.99	19.89	23.12	26.95	31.18	35.86	46.26	57.02	66.76	75.09	81.58
0.08	8.00	9.19	10.59	12.22	14.08	16.18	18.68	21.42	24.55	27.86	31.62	39.21	47.04	53.88	59.56	63.76
0.10	8.00	9.15	10.44	11.94	13.66	15.59	17.73	20.15	22.74	25.59	28.51	34.61	40.40	45.49	49.69	52.91
0.12	8.00	9.08	10.32	11.74	13.27	15.02	16.90	19.03	21.27	23.68	26.15	31.07	35.66	39.69	42.90	45.47
0.15	8.00	9.00	10.14	11.39	12.77	14.30	15.93	17.63	19.51	21.48	23.36	27.15	30.62	33.49	35.83	37.70
0.20	8.00	8.90	9.88	10.96	12.12	13.37	14.66	16.00	17.38	18.78	20.15	22.78	25.02	26.95	28.42	29.68
0.30	8.00	8.71	9.50	10.29	11.13	12.01	12.86	13.72	14.57	15.44	16.19	17.63	18.82	19.80	20.62	21.23
0.40	8.00	8.60	9.20	9.77	10.39	11.00	11.63	12.18	12.76	13.30	13.79	14.65	15.35	15.95	16.42	16.82
0.50	8.00	8.46	8.92	9.37	9.81	10.27	10.66	11.09	11.43	11.80	12.11	12.66	13.10	13.46	13.77	14.01
0.60	8.00	8.35	8.70	9.01	9.34	9.63	9.94	10.19	10.45	10.71	10.87	11.26	11.52	11.77	11.93	12.06
0.70	8.00	8.25	8.49	8.70	8.95	9.15	9.33	9.51	9.65	9.82	9.92	10.15	10.31	10.44	10.55	10.64
0.80	8.00	8.17	8.31	8.45	8.60	8.73	8.82	8.90	8.98	9.07	9.16	9.28	9.37	9.46	9.52	9.57
0.90	8.00	8.07	8.14	8.21	8.27	8.32	8.38	8.44	8.44	8.50	8.52	8.57	8.62	8.64	8.66	8.67

Exemplo 5 — Determinar a flecha na extremidade livre B da consola AB, sendo a secção da viga rectangular de altura linearmente variável entre $h_A = 25$ cm e $h_B = 10$ cm.

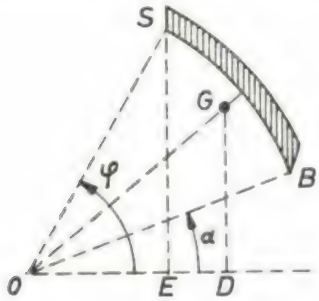
Teremos $\frac{I_B}{I_A} = \left(\frac{10}{25}\right)^3 = 0{,}064$; $\frac{a}{l} = 1{,}0$

A tabela 2 dá $f_B = \frac{Pl^3}{24{,}98\ EI_B} = \frac{Pl^3}{1{,}6\ EI_A}$

Exemplo 6 — Considerar, no exemplo anterior, a actuação duma carga uniformemente distribuída p

Teremos agora $f_B = \frac{pl^4}{78{,}02\ EI_B} = \frac{pl^4}{4{,}99\ EI_A}$

3.1 — Dada a facilidade com que se calculam os momentos flectores, apenas se refere um caso, o da actuação da carga uniformemente distribuída segundo o arco de circunferência. Nesta hipótese a resultante das cargas entre B e S de



ângulo ao centro $(\varphi - \alpha)$ passa pelo centro de gravidade G do arco $\widehat{BS}$ e vale $qr\,(\varphi - \alpha)$ sendo q a carga por unidade de comprimento do arco.

$$OG = \frac{r \operatorname{sen} \frac{\varphi - \alpha}{2}}{\frac{\varphi - \alpha}{2}}$$

$$OD = \frac{r \operatorname{sen} \frac{\varphi - \alpha}{2}}{\frac{\varphi - \alpha}{2}} \cos\left(\alpha + \frac{\varphi - \alpha}{2}\right)$$

$$OE = r \cos \varphi$$

Resulta

$$M_S = -qr^2 (\varphi - \alpha) \left[\frac{r \operatorname{sen} \frac{\varphi - \alpha}{2}}{\frac{\varphi - \alpha}{2}} \times \right.$$

$$\left. \times \cos \frac{(\varphi + \alpha)}{2} - \cos \varphi \right] =$$

$$= -qr^2 \left[2 \operatorname{sen} \frac{\varphi - \alpha}{2} \cos \frac{\varphi + \alpha}{2} - (\varphi - \alpha) \cos \varphi \right] =$$

$$= -qr^2 \left[\operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \alpha - (\varphi - \alpha) \cos \varphi \right]$$

No caso de ser $\alpha = o$ vem:

$$M_S = -qr^2 \left[\operatorname{sen} \varphi - \varphi \cos \varphi \right]$$

e para $\varphi = 90°$ vem:

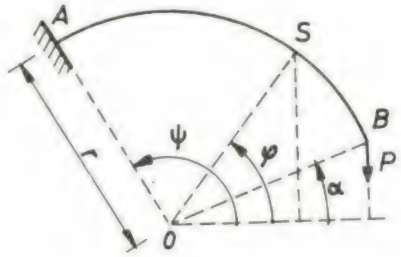
$$M_S = -qr^2 \left(1 - \operatorname{sen} \alpha \right)$$

3.2 — Actuação da carga vertical P na extremidade livre B

Quanto ao deslocamento da extremidade B, tomemos em 1.º lugar a hipótese de actuação de uma carga vertical P.

Considerando além de P, que define a expressão de M, a actuação de uma carga vertical $P' = 1$ em B a qual define m, resulta

$$\begin{cases} M = -Pr\,(\cos \alpha - \cos \varphi) \\ m = -\ r\,(\cos \alpha - \cos \varphi) \\ ds = r d\varphi \end{cases}$$



Teremos para valor da componente vertical do deslocamento de B

$$f_{yB} = \frac{Pr^3}{EI} \int_{\alpha}^{\varphi} (\cos \alpha - \cos \varphi)^2 \, d\varphi =$$

$$= \frac{Pr^3}{EI} \left[(\psi - \alpha) \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} (\psi - \alpha) + \right.$$

$$+ \frac{1}{4} (\operatorname{sen} 2\psi - \operatorname{sen} 2\alpha) -$$

$$\left. - 2 \cos \alpha \, (\operatorname{sen} \psi - \operatorname{sen} \alpha) \right] =$$

$$= \frac{Pr^3}{EI} \left[\frac{\psi - \alpha}{2} (1 + 2 \cos^2 \alpha) + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \operatorname{sen} \psi \, (\cos \psi - 4 \cos \alpha) +$$

$$\left. + \frac{3}{4} \operatorname{sen} 2\alpha \right]$$

a que corresponde, no caso de ser $\alpha = 0$.

$$f'_{yB} = \frac{Pr^3}{4EI} (6\psi + \operatorname{sen} 2\psi - 8 \operatorname{sen} \psi)$$

e no caso de ser $\psi = 90°$

$$f''_{yB} = \frac{Pr^3}{4EI} \left[(\pi - 2\alpha)\,(1 + 2 \cos^2 \alpha) - 8 \cos \alpha + \right.$$

$$\left. + 3 \operatorname{sen} 2\alpha \right]$$

Para calcular o deslocamento horizontal consideramos agora a aplicação da carga horizontal

$Q = 1$ em B a fim de determinar o valor de m e vem

$$M = -Pr(\cos\alpha - \cos\varphi)\,;\; m = -r(\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\alpha)$$

$$f_{xB} = \frac{Pr^3}{EI}\int_{\alpha}^{\psi}(\cos\alpha - \cos\varphi)(\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\alpha)\,d\varphi$$

donde se tira

$$f_{xB} = \frac{Pr^3}{EI}\Big[-\cos\alpha(\cos\psi - \cos\alpha) - (\psi - \alpha)\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2}(\operatorname{sen}^2\psi - \operatorname{sen}^2\alpha) + \operatorname{sen}\alpha(\operatorname{sen}\psi - \operatorname{sen}\alpha)\Big] =$$

$$= \frac{Pr^3}{EI}\Big[\cos\alpha(\cos\alpha - \cos\psi) - (\psi - \alpha)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - \frac{1}{2}(\operatorname{sen}^2\psi + \operatorname{sen}^2\alpha) + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\psi\Big]$$

Para $\alpha = 0$ vem

$$f'_{xB} = \frac{Pr^3}{EI}\left[1 - \cos\psi - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\psi\right]$$

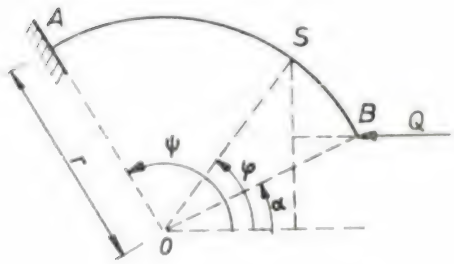
e para $\psi = 90^\circ$

$$f''_{xB} = \frac{Pr^3}{EI}\left[\frac{1}{2}\cos^2\alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}\alpha\right]$$

3.3 — Actuação da carga horizontal Q na extremidade livre B

No caso da determinação da componente horizontal do deslocamento de B

$$\begin{cases} M = -Qr(\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\alpha) \\ m = -r(\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\alpha) \\ ds = -r\,d\varphi \end{cases}$$



$$f_{xB} = \frac{Qr^3}{EI}\int_{\alpha}^{\psi}(\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\alpha)^2\,d\varphi =$$

$$= \frac{Qr^3}{EI}\Big[\frac{1}{2}(\psi - \alpha) - \frac{1}{4}(\operatorname{sen}2\psi - \operatorname{sen}2\alpha) + (\psi - \alpha)\operatorname{sen}^2\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha(\cos\psi - \cos\alpha)\Big] =$$

$$= \frac{Qr^3}{EI}\Big[(\psi - \alpha)\left(\frac{1}{2} + \operatorname{sen}^2\alpha\right) + (2\operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\psi)\cos\psi - \frac{3}{2}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\Big]$$

Esta expressão para $\alpha = 0$ toma o valor

$$f'_{xB} = \frac{Qr^3}{2EI}\Big[\psi - \operatorname{sen}\psi\cos\psi\Big]$$

e para $\psi = 90^\circ$

$$f''_{xB} = \frac{Qr^3}{2EI}\Big[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)(1 + 2\operatorname{sen}^2\alpha) - 3\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\Big]$$

Na determinação de f_{yB} introduz-se uma força vertical $P = 1$ para achar m,

$$M = -Qr(\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\alpha)\,;\; m = -r(\cos\alpha - \cos\varphi)\,;\; ds = r\,d\varphi$$

$$f_{yB} = \frac{Qr^3}{EI}\int_{\alpha}^{\psi}(\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\alpha)(\cos\alpha - \cos\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{Qr^3}{EI}\Big[\cos\alpha(\cos\alpha - \cos\psi) - \frac{1}{2}(\operatorname{sen}^2\psi - \operatorname{sen}^2\alpha - (\psi - \alpha)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha(\operatorname{sen}\psi - \operatorname{sen}\alpha)\Big] =$$

$$= \frac{Qr^3}{EI}\Big[\cos\alpha(\cos\alpha - \cos\psi) - (\psi - \alpha)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - \frac{1}{2}(\operatorname{sen}^2\psi + \operatorname{sen}^2\alpha) + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\psi\Big]$$

Para $\alpha = 0$ teremos

$$f'_{yB} = \frac{Qr^3}{EI}\left(1 - \cos\psi - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\psi\right)$$

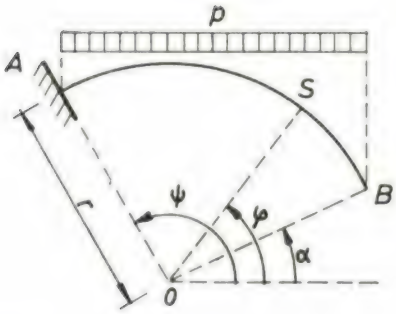
e para $\psi = 90^\circ$

$$f''_{yB} = \frac{Qr^3}{EI}\Big[\frac{1}{2}\cos^2\alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha(\operatorname{sen}\alpha - 1)\Big]$$

3.4 — Actuação de uma carga uniformemente distribuida p no vão

Teremos nesta hipótese, para cálculo de f_y,

$$\begin{cases} M = -\dfrac{pr^2}{2}(\cos\alpha - \cos\varphi)^2 \\ m = -r(\cos\alpha - \cos\varphi) \\ ds = r\,d\varphi \end{cases}$$



donde resulta

$$f_{yB} = \frac{pr^4}{2\,EI}\int_{\alpha}^{\psi} (\cos\alpha - \cos\varphi)^3\, d\varphi =$$

$$= \frac{pr^4}{2\,EI}\Big\{(\psi-\alpha)\cos^3\alpha - 3\cos^2\alpha(\operatorname{sen}\psi - \operatorname{sen}\alpha) +$$

$$+ 3\cos\alpha\Big[\frac{1}{2}(\psi-\alpha) - \frac{1}{4}(\operatorname{sen} 2\psi - \operatorname{sen} 2\alpha) -$$

$$- \frac{1}{3}(\cos^2\psi \operatorname{sen}\psi - \cos^2\alpha \operatorname{sen}\alpha) -$$

$$- \frac{2}{3}(\operatorname{sen}\psi - \operatorname{sen}\alpha)\Big\} =$$

$$= \frac{pr^4}{2\,EI}\Big\{(\psi-\alpha)\cos\alpha\left(\cos^2\alpha + \frac{3}{2}\right) -$$

$$- (\operatorname{sen}\psi - \operatorname{sen}\alpha)\left(\frac{2}{3} + 3\cos^2\alpha\right) -$$

$$- \frac{3}{4}\cos\alpha(\operatorname{sen} 2\psi - \operatorname{sen} 2\alpha) -$$

$$- \frac{1}{3}(\cos^2\psi \operatorname{sen}\psi - \cos^2\alpha \operatorname{sen}^2\alpha)\Big\}$$

Para $\alpha = 0$ resulta

$$f'_{yB} = \frac{pr^4}{2\,EI}\left[\frac{5}{2}\psi + \operatorname{sen}\psi\left(\frac{1}{3}\operatorname{sen}^2\psi - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{3}{2}\cos\psi - 4\right)\right]$$

e para $\psi = 90^o$

$$f''_{yB} = \frac{pr^4}{2\,EI}\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\alpha\left(\frac{3}{2} + \cos^2\alpha\right) -\right.$$

$$- \frac{2}{3}(1 - \operatorname{sen}\alpha) - \cos^2\alpha\left(\frac{3}{2}\operatorname{sen}\alpha -\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^2\alpha + 3\right)\right]$$

Para a determinação de f_x vem

$$M = -\frac{pr^2}{2}(\cos\alpha - \cos\varphi)^2\ ;$$

$$m = -r(\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\alpha)\ ;\quad ds = rd\varphi$$

$$f_{xB} = \frac{pr^4}{2\,EI}\int_{\alpha}^{\psi}(\cos\alpha - \cos\varphi)^2(\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\alpha)\,d\varphi =$$

$$= \frac{pr^4}{2\,EI}\Big[-(\psi-\alpha)\operatorname{sen}\alpha\left(\frac{1}{2} + \cos^2\alpha\right) -$$

$$- \cos^2\alpha\cos\psi - \frac{1}{3}\cos^3\psi +$$

$$+ \cos^3\alpha - \frac{1}{4}\operatorname{sen}\alpha(\operatorname{sen} 2\psi - \operatorname{sen} 2\alpha) -$$

$$- \cos\alpha(\operatorname{sen}^2\psi - \operatorname{sen}^2\alpha) +$$

$$+ 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha(\operatorname{sen}\psi - \operatorname{sen}\alpha)\Big]$$

expressão que, para $\alpha = 0$, dá

$$f'_{xB} = \frac{pr^4}{2\,EI}\left[\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\cos^3\psi - \cos\psi - \operatorname{sen}^2\psi\right]$$

e para $\psi = 90^o$

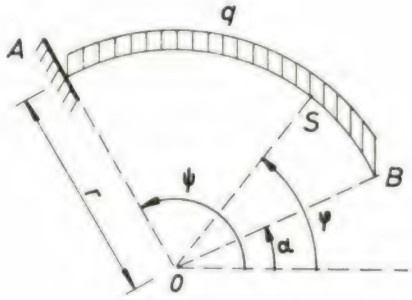
$$f''_{xB} = \frac{pr^4}{2\,EI}\left[\frac{4}{3}\cos^3\alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\times\right.$$

$$\times\operatorname{sen}\alpha\left(\frac{1}{2} + \cos^2\alpha\right) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha +$$

$$+ 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

3.5 — Actuação da carga uniformemente distribuída q segundo o eixo da viga

Conforme se indicou em 3.1,



$$M = -qr^2[\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\alpha - (\varphi - \alpha)\cos\varphi]$$

$$m = -r(\cos\alpha - \cos\varphi) \qquad ds = rd\varphi$$

$$f_{YB} = \frac{qr^4}{EI}\int_{\alpha}^{\psi}[\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\alpha - (\varphi-\alpha)\cos\varphi]\times$$

$$\times(\cos\alpha - \cos\varphi)\,d\varphi = \frac{qr^4}{EI}\left[\frac{1}{4}(\psi^2 - \alpha^2) -\right.$$

$$-\frac{15}{8}\cos^2\alpha - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\alpha - \frac{\alpha}{2}(\psi\ \ \alpha) - \alpha\operatorname{sen}\alpha\times$$

$$\times \cos\alpha - 2\cos\alpha\cos\psi - \frac{1}{2}\,\text{sen}^2\psi - \psi\,\text{sen}\,\alpha \times$$

$$\times \cos\alpha + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\psi - \psi\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha - \psi\,\text{sen}\,\psi\cos\alpha +$$

$$+ \frac{1}{4}\psi\,\text{sen}\,2\psi + \frac{1}{8}\cos 2\psi + \alpha\cos\alpha\,\text{sen}\,\psi -$$

$$- \frac{\alpha}{4}\,\text{sen}\,2\psi\Big]$$

Esta expressão, para $\alpha = 0$ transforma-se em

$$f'_{YB} = \frac{qr^4}{EI}\Big[\frac{1}{4}\psi^2 + \frac{15}{8} - 2\cos\psi -$$

$$- \frac{1}{2}\,\text{sen}^2\psi - \psi\,\text{sen}\,\psi + \frac{1}{4}\psi\,\text{sen}^2\psi +$$

$$+ \frac{1}{8}\cos^2\psi\Big]$$

e para $\psi = 90^0$ transforma-se em

$$f''_{YB} = \frac{qr^4}{EI}\Big[\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)^2 - \frac{15}{8}\cos^2\alpha -$$

$$- \frac{5}{8} - \frac{1}{2}\,\text{sen}^2\alpha - (\pi + \alpha)\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha -$$

$$- \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\cos\alpha + \text{sen}\,\alpha\Big]$$

Para a determinação da componente horizontal da deformação temos agora

$$m = -\,r\,(\text{sen}\,\varphi - \text{sen}\,\alpha)$$

e vem

$$f_{xB} = \frac{qr^4}{EI}\int_\alpha^\psi (\text{sen}\,\varphi - \text{sen}\,\alpha - \varphi\cos\varphi + \alpha\cos\varphi) \times$$

$$\times (\text{sen}\,\varphi - \text{sen}\,\alpha)\,d\varphi =$$

$$= \frac{qr^4}{EI}\Big[\frac{3}{4}(\psi - \alpha) - \frac{9}{4}\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha - \frac{1}{2} \times$$

$$\times (\psi - \alpha)\,\text{sen}^2\psi + 3\,\text{sen}\,\alpha\cos\psi - \frac{3}{8}\,\text{sen}\,2\psi +$$

$$+ (\psi - \alpha)\,\text{sen}^2\alpha + (\psi - \alpha)\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\psi\Big]$$

Para $\alpha = o$ vem:

$$f'_{xB} = \frac{qr^4}{EI}\Big[\frac{3}{4}\psi - \frac{1}{2}\psi\,\text{sen}^2\psi - \frac{3}{8}\,\text{sen}^2\psi\Big]$$

Para $\psi = 90^o$ será:

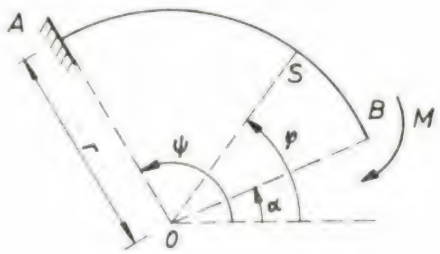
$$f''_{xB} = \frac{qr^4}{EI}\Big[\frac{5}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \frac{9}{4}\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha +$$

$$+ (\psi - \alpha)\,\text{sen}\,\alpha\Big]$$

3.6 — Actuação do momento M_B em B

Teremos, para determinar a componente vertical f_y,

$$M = -\,M_B\,;\quad m = -\,r\,(\cos\alpha - \cos\varphi)\,;\quad ds = r\,d\varphi$$



$$f_{yB} = \frac{M_B\,r^2}{EI}\int_\alpha^\psi (\cos\alpha - \cos\varphi)\,d\varphi = \frac{M_B\,r^2}{EI} \times$$

$$\times [\,(\psi - \alpha)\cos\alpha - \text{sen}\,\psi + \text{sen}\,\alpha\,]$$

Esta expressão, para $\alpha = o$ toma a forma

$$f'_{yB} = \frac{r^2}{EI}\,M_B\,(\psi - \text{sen}\,\psi)$$

e para $\psi = 90^o$

$$f''_{yB} = \frac{r^2}{EI}\,M_B\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\alpha - 1 + \text{sen}\,\alpha\right]$$

Para a determinação de f_{xB}

$$M = -\,M_B\,;\quad m = \quad r\,(\text{sen}\,\varphi - \text{sen}\,\alpha)\,;\quad ds = r\,d\varphi$$

$$f_{xB} = \frac{M_B\,r^2}{EI}\int_\alpha^\psi (\text{sen}\,\varphi - \text{sen}\,\alpha)\,d\varphi =$$

$$= \frac{M_B\,r^2}{EI}\Big[-\cos\psi + \cos\alpha - (\psi - \alpha)\,\text{sen}\,\alpha\Big]$$

Para $\alpha = 0$

$$f'_{xB} = \frac{r^2}{EI}\,M_B\,(1 - \cos\psi)$$

e para $\psi = 90^o$

$$f''_{xB} = -\frac{r^2}{EI}\,M_B\left[\cos\alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\text{sen}\,\alpha\right]$$

3.7 — *Exemplo 7* — Calcular os deslocamentos vertical f_{yB} e horizontal f_{xB} do extremo B de uma viga circular de raio r, perfeitamente encastrada em A e solicitada em B por uma carga P

O novo Nível automático de engenheiro

WILD NAK 2

com círculo horizontal

WILD
HEERBRUGG

Para nivelamentos de média e grande precisão; com micrómetro de lâmina de faces plano-paralelas para nivelamentos de grande precisão.

Erro médio para 1 Km de nivelamento duplo: ± 1,5 mm

Erro médio para 1 Km de nivelamento duplo com micrómetro: ± 0,4 mm

Luneta de 30 × de aumento com imagem direita de observação

Solicitem catálogo ou demonstração aos representantes exclusivos

WILD PORTUGAL, LDA.

PRAÇA DAS ÁGUAS LIVRES, 8
LISBOA - 2 — TELEFONE 68 11 27

FILTROS TECIDOS

PARA GAZES E LÍQUIDOS
EM PEÇAS, PANOS, MANGAS OU SACOS

DE QUALQUER FIBRA NATURAL OU SINTÉTICA

FANAFEL

FÁBRICA NACIONAL DE FELTROS INDUSTRIAIS
SOCIEDADE LIMITADA

APART.: 9
TELEFS.: 52093-52094
TELEG.: FELTROS

OVAR
PORTUGAL

ESCRITÓRIO E FÁBRICA
ESTRADA DE S. JOÃO

Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações, L.da

(SONDADORA)

SONDAGENS geológicas e geotécnicas — CAPTAÇÕES de águas subterrâneas — REBAIXAMENTOS do nível freático — CONSOLIDAÇÕES E ESTABILIZAÇÃO do solo — INJECÇÕES DE CIMENTO e outros produtos — INFRAESTRUTURAS de barragens, túneis e pontes — FUNDAÇÕES de todos os tipos

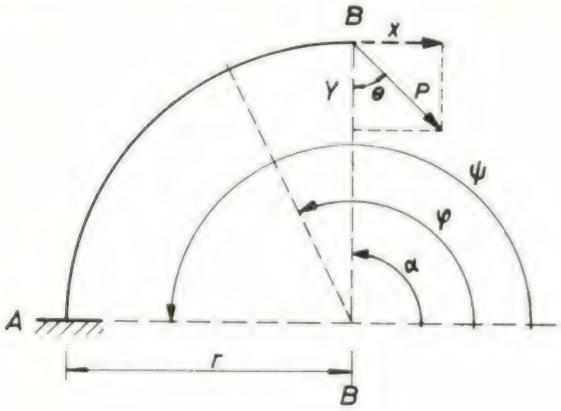
Única Empresa da especialidade com sede no Ultramar Português

DELEGAÇÃO - LISBOA
R.S.Pedro de Alcântara, 1
Tel. 32 46 93 e 21 32 56

SEDE - LUANDA
Rua Serpa Pinto, 60
C.P.2178 - Tel.4226

MOÇAMBIQUE
L.Marques - C.P.982 - Tel.74 11 21
Beira - C.P. 1002 - Tel. 7 14 97

formando o ângulo θ com a vertical. Decompõe-se a carga P em $X = P \text{ sen } \theta$; $Y = P \cos \theta$ e aplicam-se as expressões deduzidas em 3.1 e 3.2.



Será para $\alpha = 90^o$, $\psi = 180^o$

$$f_{yB} = \frac{Y\, r^3}{EI} \times \frac{\pi}{4} + \frac{X\, r^3}{EI} \times \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{P\, r^3}{2\, EI} \left(\text{sen } \theta + \frac{\pi}{2} \cos \theta \right)$$

$$f_{xB} = - \frac{Y\, r^3}{EI} \times \frac{1}{2} - \frac{X\, r^3}{EI} \left(\frac{3\, \pi}{4} - 2 \right) =$$

$$= - \frac{P\, r^3}{EI} \left[\left(\frac{3\, \pi}{4} - 2 \right) \text{sen } \theta + \frac{1}{2} \cos \theta \right]$$

Exemplo 8 — Determinar a flecha na extremidade da viga curva de aço indicada na figura, sendo a secção da viga 0,12 m × 0,12 m donde

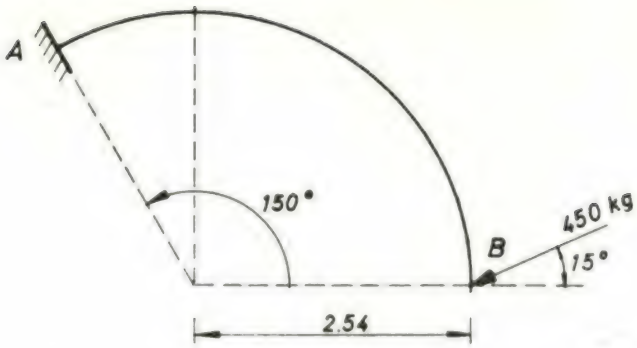
$$I = \frac{12 \times 12^3}{12} = 1.728 \text{ cm}^4$$

$$\text{sen } 15^o = 0{,}25882$$

$$\cos 15^o = 0{,}96593$$

$$P_X = 450 \times 0{,}96593 = 435 \text{ kg}$$

$$P_Y = 450 \times 0{,}25882 = 116 \text{ kg}$$



Teremos para $\psi = 150^o = 2{,}61799$ rad, $\alpha = 0^o$, $E = 2.100.000$ kg/cm2, sobrepondo os casos 3.2 e 3.3.

$$f_{yB} = \frac{116 \times 254^3}{4 \times 1.728 \times 2.100.000} \times$$

$$\times (6 \times 2{,}61799 - 0{,}86603 - 8 \times 0{,}5) +$$

$$+ \frac{435 \times 254^3}{2 \times 1.728 \times 2.100.000} \times$$

$$\times (1 + 0{,}8660 \times \frac{1}{2} \times 0{,}5^2) = 4{,}8 \text{ cm}$$

$$f_{xB} = \frac{116 \times 254^3}{1.728 \times 2.1000.000} \times$$

$$\times \left(1 + 0{,}86603 - \frac{1}{2} \times 0{,}5^2 \right) +$$

$$+ \frac{435 \times 254^3}{2 \times 1.728 \times 2.100.000} \times$$

$$\times (2{,}61799 + 0{,}86603 \times 0{,}5) = 3{,}9 \text{ cm}$$

A grandeza do deslocamento de B, cujas componentes são 4,8 cm e 3,9 cm é

$$d = \sqrt{4{,}8^2 + 3{,}9^2} = 6{,}2 \text{ cm}$$

SEMANA DE ENGENHARIA ELECTROTÉCNICA

17-24 DE FEVEREIRO, 1967 — INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

PROGRAMA

Dia 17, Sexta feira

10.30 h — Sessão de abertura, presidida pelo Magnífico Reitor da Universidade Técnica.
14.30 h — Visita de estudo à Fábrica de Condutores Eléctricos Diogo Ávila.

Dia 18, Sábado

10.30 h — Palestra pelo Ex.mo Sr. Prof. Carlos Ferrer Moncada, sobre «Energia Magneto-Cinética associada ao circuito de medida do fluxímetro de quadro móvel».
18.00 h — Palestra pelo Ex.mo Sr. Prof. Abreu Faro, sobre «Os objectivos do ensino superior e da investigação ligada ao ensino».

Dia 20, Segunda feira

10.30 h — Palestra pelo Ex.mo Sr. Prof. Carvalho Fernandes, sobre «Amplificadores operacionais em computação electrónica analógica».
18.30 h — Sessão de filmes.

Dia 21, Terça feira

9.30 h — Visita de estudo à Standard Eléctrica.
18.15 h — Sessão de filmes.

Dia 22, Quarta feira

10.30 h — Palestra pelo Ex.mo Sr. Prof. Abreu Faro, sobre «Ondas electromagnéticas em plasmas indefinidos».
18.15 h — Sessão de filmes.

Dia 23, Quinta feira

10.30 h — Palestra pelo Ex.mo Sr. Prof. Wittnich Carrisso, sobre «Alguns aspectos da electrificação da região centro-oeste de Angola».
18.15 h — Colóquio sobre o ensino da Engenharia Electrotécnica, dirigido pelo Ex.mo Sr. Prof. Abreu Faro.

Dia 24, Sexta feira

18.30 h — Sessão de encerramento, presidida pelo Ex.mo Sr. Director do I.S.T.

Horário da Exposição Industrial presente no Pavilhão Central do I.S.T.

Dias úteis

Manhã — das 10 h às 12.30 h
Tarde — » 15 h » 18.30 h
Noite — » 20.30 h » 22.30 h

Domingo

Tarde — das 15 h às 18.30 h
Noite — » 20.30 h » 22.30 h

C. D. U. 624.155.001

MÉTODO GRÁFICO ANALÍTICO PARA A DETERMINAÇÃO DAS SOLICITAÇÕES EM MACIÇOS DE DUAS ESTACAS

por J. M. MADEIRA COSTA
Engenheiro Civil

RESUMO

Apresenta-se um método gráfico-analítico que permite obter ràpidamente os esforços actuantes nas estacas tendo em conta a deformação do sistema.

Como método gráfico, evidencia as modificações de geometria mais convenientes para se obter a solução satisfatória.

SYNOPSIS

This paper presents a method of design giving easily the forces along the piles in groups of two piles.

The method proposed gives with the axial forces also moments and shear forces at the top and other sections.

The method is particulary usefull for obtaining the type of foundation more satisfactory.

1 — INTRODUÇÃO

A escolha da geometria mais conveniente, tanto do ponto de vista de esforços como económico, a dar a um maciço de duas estacas é um problema frequente para o projectista e nem sempre de rápida solução.

O sistema estrutural formado por um maciço solidarizando duas estacas é, como é sabido, normalmente hiperestático. O mesmo é dizer-se, que é necessário mobilizar nas estacas, momentos flectores ou esforços transversos ou ambos, simultâneamente, para que o sistema seja estável para uma dada solicitação exterior. Para a determinação dos esforços actuantes nas estacas é necessário considerar a deformação do sistema.

Considere-se o sistema representado na fig. 1. Tal sistema só será estàticamente determinado se R passar em P, intercepção dos eixos das estacas e, se se admitirem, além disso, certas hipóteses simplificativas.

O problema posto é então a determinação das solicitações nas estacas, no caso geral; a solicitação R, em módulo e posição, e a localização e inclinação das estacas serão quaisquer.

Existem métodos de cálculo, o de Vesic, por exemplo, que permitem a resolução do problema. Simplesmente, é sempre desejável dispor de métodos que permitam obter ràpidamente uma solução, mesmo aproximada, cuja verificação final pode então ser efectuada por um método cujas hipóteses sejam mais precisas no entender do projectista. Os métodos gráficos são particularmente expressivos, adaptando-se bem à pesquisa de soluções.

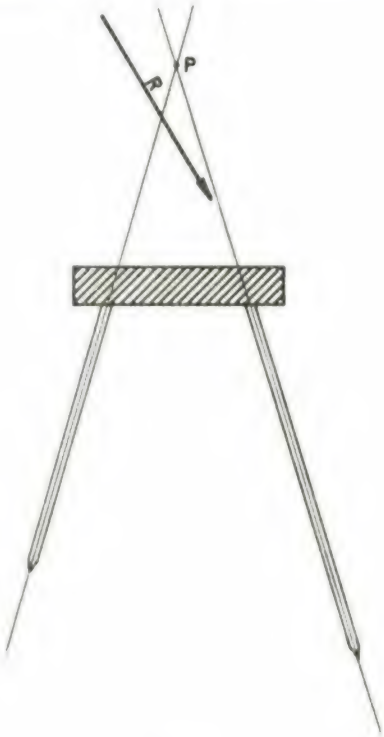


Fig. 1

2 — ESTACAS SOLICITADAS NA CABEÇA SÒMENTE POR ESFORÇOS NORMAIS E TRANSVERSOS

Considera-se, nesta hipótese, que as ligações das estacas ao maciço não absorvem momentos.

Os esforços na cabeça das estacas serão então T_A e N_A na estaca *A* e T_B e N_B na estaca *B*, fig. 2.

A verificação de segurança de fundações sobre estacas é feita, normalmente, pelo método de Nökkentved [1], baseado nas três hipóteses seguintes:

1 — As estacas são articuladas na cabeça e na ponta;

2 — A componente axial do deslocamento da cabeça da estaca é proporcional à solicitação suportada pela estaca;

3 — O maciço é indeformável.

Estas hipóteses não serão aqui analisadas, nem tão pouco as limitações do método quanto à determinação da segurança efectiva duma fundação. Ver a tal respeito [2], por exemplo.

Como se referiu, para que um sistema de duas estacas seja estável não é, normalmente, possível considerar sòmente os esforços axiais. Sob a acção duma solicitação exterior *R* o sistema deformar-se-á mobilizando esforços transversos e momentos compatíveis com o sistema e com o solo e necessários ao equilíbrio de conjunto.

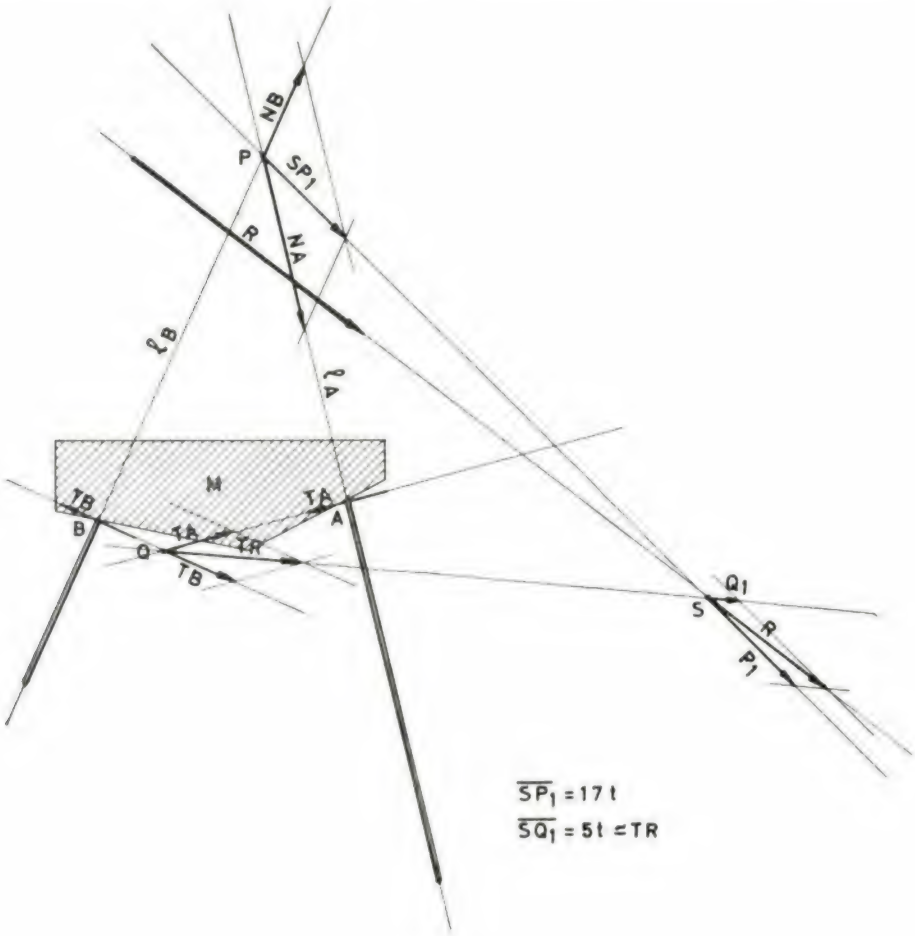


Fig. 2

Neste estudo mantém-se a hipótese 3) de Nökkentved a que se juntam as duas seguintes:

1 — A deformação axial das estacas é muito pequena quando comparada com a deformação transversal do sistema. Esta hipótese é intuitiva e está de acordo com ensaios de casos correntes;

2 — As estacas comportam-se como elementos elásticos encastradas em meio também elástico. Admite-se ainda que o meio é uniforme e o mesmo para ambas as esta-

cas e que estas são longas no sentido da teoria dos elementos elásticos fundados em meio elástico.

Nestas hipóteses, sempre que R não passe por P (fig. 2) o sistema roda em torno de P até mobilizar esforços T_A e T_B, função das características elásticas das estacas e do solo.

Os componentes axiais (N_A e N_B) assim como a sua resultante passarão por P.

Demonstra-se, que (*):

$$T = \frac{K \cdot b}{2\beta} \cdot \delta \qquad (1)$$

em que

K — é o coeficiente de compressibilidade do solo (kgf. cm^{-3});

b — é a largura da estaca, normalmente o seu diâmetro (cm);

δ — o deslocamento transversal da estaca na cabeça (cm);

$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4.E.I}}$ — o inverso do comprimento elástico (cm^{-1});

k — K.b (kgf. cm^{-2});

E — o módulo de elasticidade da estaca (kgf. cm^{-2}).

I — o momento de inércia da estaca (cm^4)

É possível escrever:

$$\delta_A = \theta \cdot l_A \quad e \quad \delta_B = \theta \cdot l_B \qquad (2)$$

sendo:

l_A e l_B as distâncias $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ e θ a rotação de conjunto.

Tem-se, então:

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{b_A \cdot l_A}{b_B \cdot l_B} \times \frac{\beta_B}{\beta_A} \qquad (3)$$

Admitindo uma dada geometria para o sistema, são conhecidos l_A, l_B, b_A, b_B, β_A, β_B e é possível determinar $\frac{T^A}{T_B}$, de (3).

Geralmente as duas estacas serão ou circulares ou rectangulares, com o mesmo diâmetro ou lado, de que resulta:

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{l_A}{l_B} \qquad (4)$$

(*) — Ver, por exemplo, referências [3], [4] e [5].

Frequentemente, é ainda $l_A = l_B$ e, então $T_A = T_B$.

Duma forma geral pode escrever-se:

$$T_A = \frac{1}{n} T_B \qquad (5)$$

com n dado por (3) ou (4).

É agora possível resolver o sistema gràficamente sem dificuldade.

As etapas são as seguintes:

a — marca-se numa escala escolhida, T_A;

b — marca-se $T_B = n \cdot T_A$;

c — compõe-se T_A e T_B obtendo-se T_R;

d — une-se a intercepção S, de T_R e R, com P;

e — decompõe-se R nas direcções $\overline{PS}$ e T_R;

f — a resultante T_R, dada por $\overline{SQ_1}$, fornece a escala real de T_A e T_B, e, portanto, os seus valores;

g — decomposto $\overline{SP_1}$ nas direcções das estacas obtém-se N_A e N_B.

Conhecendo os esforços nas cabeças das estacas é possível determinar T e M nas outras secções (ver Cap. 3).

Exemplo, (fig. 2)

Seja:

$R = 20{,}0$ tf.

$l_A = 0{,}88\ l_B$ (tirado da fig. 2)

será: $n = 1{,}14$.

Traçando, por exemplo, $T'_A = 1$, será $T'_B = 1{,}14$ e obtém-se $T_R = 2{,}1$.

Traçando, a partir de S, $R = 20{,}0$ tf e decompondo, obtém-se $SP_1 = 17{,}0$ tf e $SQ_1 = 5{,}0$ tf.

Será então:

$T_A = 5{,}0 : 2{,}1 = 2{,}4$ tf

$T_B = 1{,}14 \times 2{,}4 = 2{,}7$ tf

Marcando $\overline{SP_1}$ a partir de P e decompondo, tem-se:

$N_A = -25{,}0$ tf (compressão), e

$N_B = +14{,}0$ tf (tracção)

3 — ESTACAS SUBMETIDAS SIMULTÂNEAMENTE A N, T E M

Considera-se, neste caso, que as estacas estão submetidas, na cabeça, a esforços axiais N, esforços transversos T e momentos M.

Dado que se admite a indeformabilidade do maciço e encastramento perfeito das estacas no maciço as rotações entre a cabeça das estacas e o maciço serão nulas.

Sendo T_o e M_o os esforços na cabeça das estacas demonstra-se que as rotações resultantes de T_o e M_o, são dadas, respectivamente, por:

$$y' = + \frac{2\beta^2}{k} T_o \quad e \quad y' = + \frac{4\beta^3}{k} M_o$$

donde:

$$M_o = - \frac{1}{2\beta} T_o \qquad (6)$$

Todas as construções gráficas feitas na fig. 2 são válidas desde que se desçam as linhas de acção de T_A e T_B da grandeza $\frac{1}{2\beta_A}$ e $\frac{1}{2\beta_B}$.

Conhecendo T_A e T_B obtém-se M_A e M_B a partir de (6).

Para N_A e N_B não há problema novo.

A grandeza $\frac{1}{2\beta}$ depende naturalmente das características das estacas (diâmetro e módulo de elasticidade) e do solo. Como ordem de grandeza indica-se 100/150 cm.

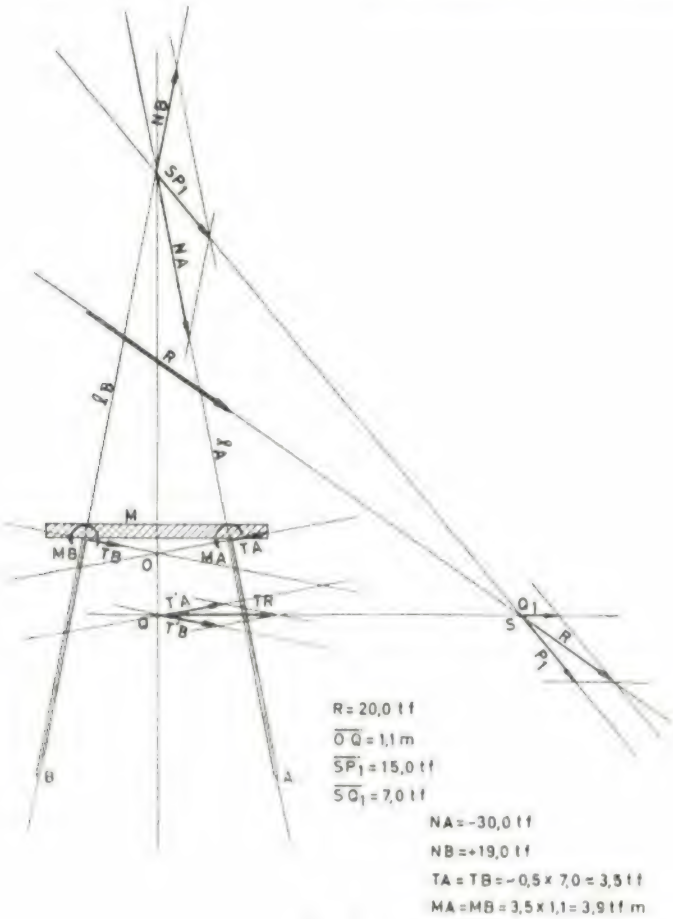


Fig. 3

A interpretação gráfica de (6) é fácil e permite resolver o problema gràficamente como anteriormente.

De (6) conclui-se que a linha de acção de T não passa em A e B, como no caso anterior, mas sim a uma distância $\frac{1}{2\beta}$ abaixo daqueles pontos; isto é, metade do comprimento elástico.

Exemplo, (fig. 3):

Seja

$$R = 20{,}0 \text{ tf}$$
$$b = 50 \text{ cm}$$
$$K = 2{,}0 \text{ kgf.cm}^{-3}$$

$E = 200000$ kgf.cm^{-2} (admite-se uma carga de grande duração).

será

$$1_A = 1_B$$

$$n = 1$$

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4.E.I}} = \sqrt[4]{\frac{2 \times 50}{4 \times 200000 \times 300000}} = \frac{1}{220}$$

$$\frac{1}{2\beta} = 110 \text{ cm}$$

A resolução gráfica fornece

$T_o = 3{,}5$ tf e, de (6),

$M_o = -\frac{1}{2\beta} T_o = -3{,}9$ tf.m

Nökkentved verificou, fazendo diferentes hipóteses sobre os graus de encastramento de estacas, que os esforços axiais dependem em muito pouco dos momentos flectores e dos esforços transversos.

$$M_x = -M_o \left[2\, F_2 (\beta x) - F_1 (\beta x) \right] \qquad (8)$$

e

$$T_x = F_3 (\beta x)\, T_o - 2\, F_2 (\beta x)\, M_o \qquad (9)$$

ou

$$T_x = T_0 \left[F_3 (\beta x) + F_2 (\beta x) \right] \qquad (10)$$

Para $M_o = 0$, caso do exemplo da fig. 2, tem-se:

$$M_x = \frac{1}{\beta} \left[F_2 (\beta x) \right] T_0 \qquad (11)$$

e

$$T_x = \left[F_3 (\beta x) \right] T_0 \qquad (12)$$

Para facilitar os cálculos, os valores das expressões [ ] de (8), (10), (11) e (12) apresentam-se no quadro seguinte para βx até 1,0.

[ ] \ βx	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$[2\, F_2 - F_1]$	−1,000	−0,639	−0,356	−0,143	0,009	0,118
$[F_3 + F_2]$	1,000	0,803	0,617	0,453	0,313	0,200
$[F_3]$	1,000	0,640	0,356	0,153	−0,009	−0,111
$[F_2]$	0,0	0,163	0,261	0,310	0,322	0,310

Esta constatação tira-se fàcilmente do presente estudo. Com efeito, analisando a fig. 2 e a fig. 3, verifica-se que SP_1 não se afasta muito de R e que o facto da linha de acção de T_R descer devido ao momento M_o tem também pouca influência em SP_1.

Conhecendo *Mo* e *To* na cabeça da estaca, é possível determinar os esforços transversos e os momentos nas outras secções aplicando a teoria das vigas elásticas fundadas em meio elástico.

Sendo x a distância da cabeça da estaca à secção em estudo, é:

$$M_x = \frac{1}{\beta} F_2 (\beta x)\, T_0 - F_1 (\beta x)\, M_o \qquad (7)$$

ou

$$M_x = \frac{T}{2\beta} \left[2\, F_2 (\beta x) - F_1 (\beta x) \right] \qquad (7')$$

Na fig. 4 apresentam-se os valores de T_x e M_x em várias secções das estacas, dos dois exemplos apresentados.

Da análise desta figura verifica-se que:

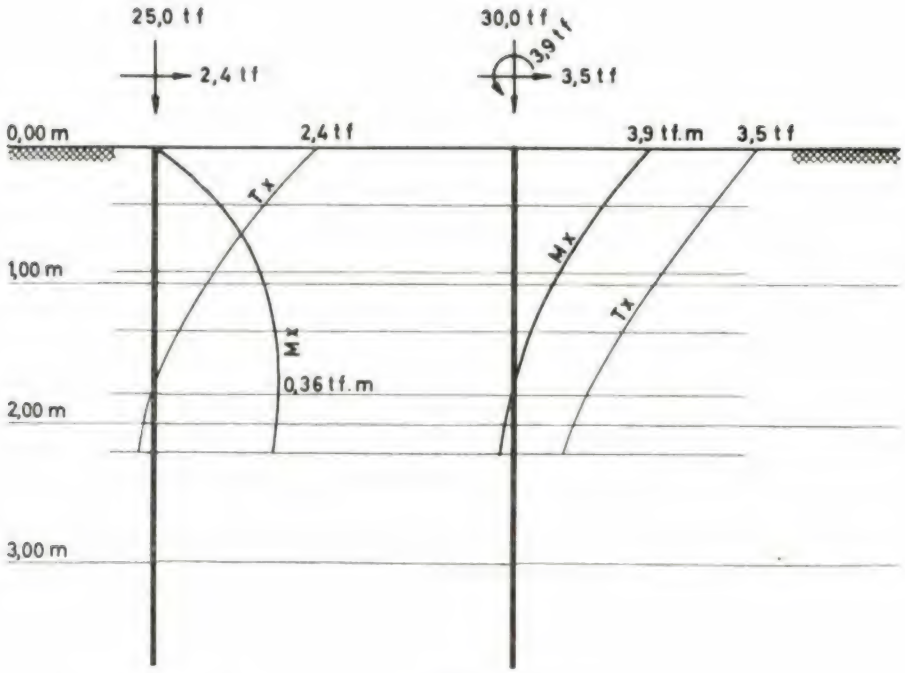
1 — os momentos M_x são pequenos se M_o é nulo;

2 — em ambos os casos T_x é ràpidamente decrescente, o mesmo sucedendo a M_x se $M_o \neq 0$.

3 — à parte problemas de flambagem, as secções mais solicitadas serão, normalmente, as secções de encastramento nos maciços.

4 — CONCLUSÕES

O método proposto permite determinar ràpidamente os esforços M,N e T na cabeça das es-



Estaca A (Ex: 1)

$\beta = 1/220$

$T_A = 2{,}4\ tf$

$M_A = 0{,}0\ tf.m$

$$Mx = \frac{1}{\beta}\left[F_2(\beta x)\right]T_A$$

$$Tx = \left[F_3(\beta x)\right]T_A$$

Estaca A (Ex: 2)

$\beta = 1/220$

$T_A = 3{,}5\ tf$

$M_A = 3{,}9\ tf.m$

$$Mx = M_A\left[2\,F_2(\beta x) - F_1(\beta x)\right]$$

$$Tx = T\left[F_3(\beta x) + F_2(\beta x)\right]$$

Fig. 4

tacas e depois os valores correspondentes noutras secções.

Esta facilidade permite ensaiar ràpidamente diversas soluções e escolher uma. A solução escolhida poderá, segundo o critério do projectista, ser ou não verificada por outro método.

O método pode, naturalmente, ser aplicado a casos de maciços de mais de duas estacas em que a sua geometria e as solicitações permitam assimilá-los a maciços de duas estacas.

O estudo apresentado não tem em conta a estabilidade transversal dos maciços; tal estabilidade deve ser sempre assegurada por meios convenientes, linteis de rigidez, por exemplo.

BIBLIOGRAFIA

[1] — C. Nökkentved — Berechnung von Pfahlrosten, Berlin 1928.

[2] — C. H. Massonet et H. Haus — Force Portante Plastique des Systèmes de Pieux.

[3] — Den Hartog — Advanced Strength of Materials.

[4] — Timoshenko — Resistência de Materiales.

[5] — Belluzzi — Scienza delle Costruzioni.

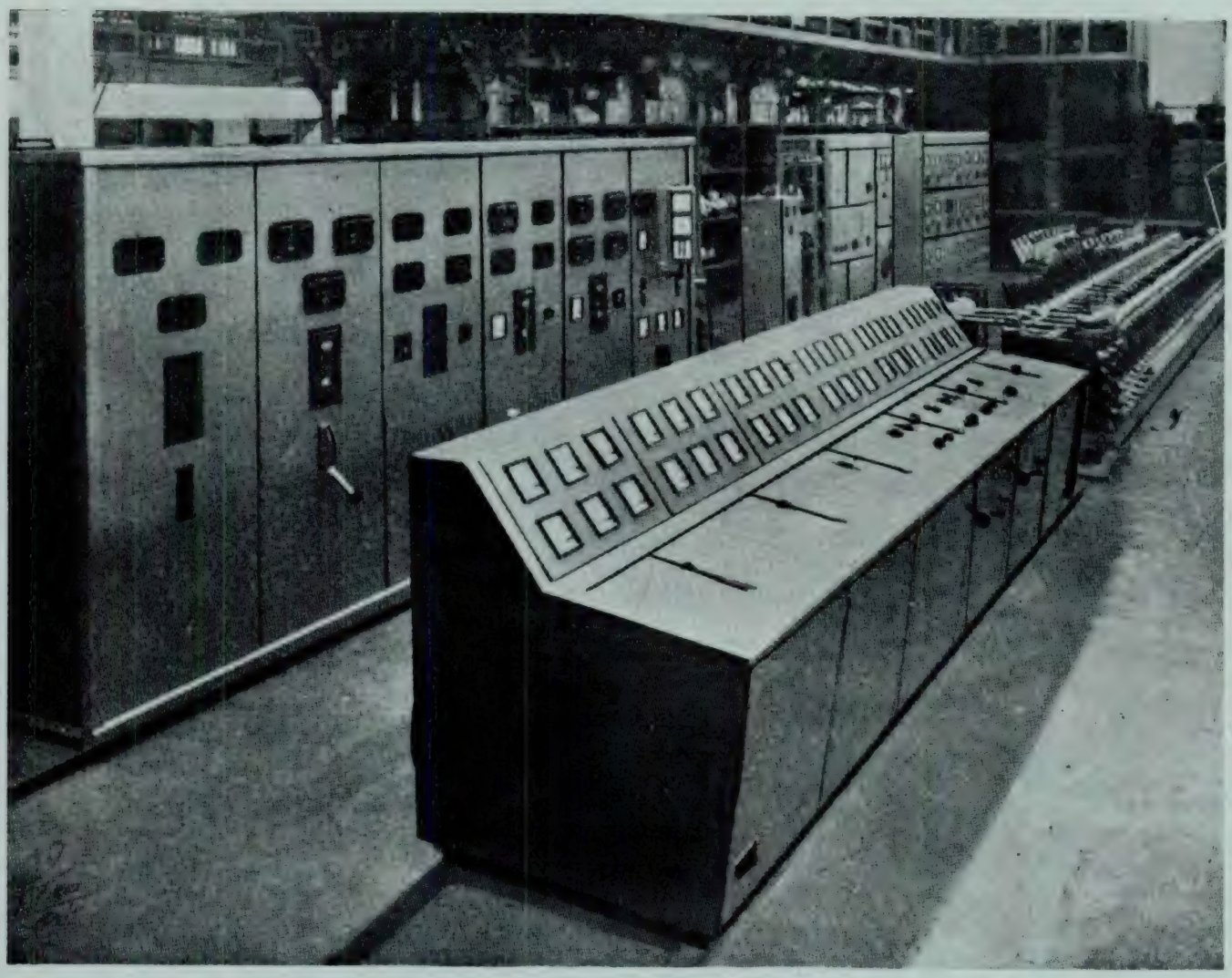
JAYME DA COSTA, L^DA

MECÂNICA E ELECTRICIDADE EM TODAS AS APLICAÇÕES

PORTO
Praça da Batalha, 12
Telef. 2 28 12 (PPC)

LISBOA
Rua dos Correeiros, 14
Telef. 32 70 35 (PPC)

LUANDA
Cx. Postal 5174
Telef. 4743



Material fabricado nas nossas oficinas, pronto para expedição

- Fabricação de aparelhagem eléctrica de alta e baixa tensão
- Equipamentos electromecânicos completos para centrais e fábricas
- Postos de transformação tipo monobloco
- Quadros blindados, capsulados e em armário
- Armaduras de iluminação de todos os tipos
- Contadores eléctricos e instrumentos de medida
- Telemedida e telecomando
- Instalações elevatórias de água
- Instalações de saneamento e esgotos
- Ferramentas de corte
- Motores Diesel industriais e marítimos
- Fogões eléctricos
- Frigoríficos
- Ventilação e condicionamento de ar
- Aparelhagem de Raios X e electromedicina

Companhia Portuguesa de Trefilaria

S. A. R. L.

ARMADURAS PRÉ-FABRICADAS **MALHASOL**

Tensão de segurança 3.000 Kgf / cm²

AÇO BI

Tensão de segurança 4.000 Kgf / cm²

AÇOS DE ALTA RESISTÊNCIA PARA BETÃO ARMADO

que pela eficiência técnica e económica a que conduzem, são um indispensável elemento na moderna construção civil

Para qualquer obra em betão armado consulte:

DIAL — GABINETE TÉCNICO

R. DO INSTITUTO INDUSTRIAL, 18-1.º Dt.º

TELEFONES 671224/5 e 673785 - LISBOA

ao serviço da energia

TUDOR

OFICINAS E LABORATÓRIOS

DO

INSTITUTO SUPERIOR TECNICO

As oficinas pedagógicas do Instituto Superior Técnico, de CARPINTARIA DE MOLDE, de INSTRUMENTOS DE PRECISÃO e de ELECTROTÉCNICA, fornecem todo o género de material escolar e de demonstração para o ensino técnico. Nos laboratórios de QUÍMICA ANALÍTICA, FÍSICA INDUSTRIAL E DE MINERALOGIA executam-se análises para o público

Para quaisquer informações, dirigir-se ao secretário da comissão executiva

C. D. U. 621.391

CÓDIGOS SEPARÁVEIS OU ÙNICAMENTE DECIFRÁVEIS, PRIMITIVOS OU IMEDIATAMENTE DECIFRÁVEIS

por GUSTAVO DE CASTRO
Matemático

RESUMO

Os primeiros problemas dos códigos para canais discretos, a primitividade e a separabilidade, são repensados com as novidades de forma que exprimem a diversidade de temperamentos. Todavia, a forma que se dá, por fim, à condição Szilard-Kraft parece ter mais do que uma vantagem sobre a tradicional, e merecer uma menção especial. Outro tanto acontece, talvez, com a alternativa que se propõe para o procedimento de Sardinas e Patterson. Todas as outras novidades são triviais.

SYNOPSIS

The first problems of codes for discrete channels, unique and instantaneous deciphrability, are thougth anew with new forms to be expected. Yet, the last formulation of the Szilard-Kraft condition seems better than the traditional one and deserve mention. The same is, perhaps, true of the procedure given instead of the one by Sardinas and Patterson if, of course, there is any difference.

1. CÓDIGOS PRIMITIVOS

O estudo matemático dos códigos [1] é suscitado pela procura de correspondências *convenientes* entre conjuntos de mensagens e, por exemplo, conjuntos de números naturais nas suas representações em numeração escrita. O seu primeiro objecto, como estudo matemático, não é, porém, nem o estudo das correspondências, nem o estudo das mensagens, mas o estudo de conjuntos C de números escritos, a que chama códigos. Um código binário, por exemplo, é um conjunto de representações binárias de números naturais.

A orientação do estudo é definida por critérios de preferência, ou excelência, correspondentes a performances numéricas associadas aos diversos códigos. A intervenção de princípios de extremo, conduzindo a problemas de optimização, aparece naturalmente. Certos condicionamentos intervêm assumindo a forma de critérios de admissibilidade, transpostos inicialmente dos problemas exteriores para a matemática, critérios que excluem códigos e delimitam as classes F de códigos que se aceitam como objecto de estudo.

Um código pode também ser lido como um conjunto de palavras construídas com as letras de um alfabeto. Conjunto de números ou conjunto de palavras são, pois, duas representações de uma entidade mais abstracta que é objecto da teoria; os nomes de seres matemáticos serão, pois, escolhidos nas línguas mais particulares em que se fala de conjuntos de representações de números, em numerações de base b, ou de palavras construídas com os b símbolos de um alfabeto. Evitam-se, deste modo problemas da organização matemática que corresponderiam à estrutura daqueles seres.

Uma medida importante da performance de um código é a média ponderada L dos comprimentos das suas palavras, onde o comprimento de cada palavra é o número das suas letras (ou dos algarismos do número); um código será mais curto que outro quando o comprimento médio das palavras for nele menor. A preferência vai geralmente para os códigos mais curtos: um código será preferível a outro quando for o mais curto dos dois. A ponderação pode ser feita com probabilidades num jogo de acaso sobreposto ao código (e naturalmente motivado por uma natureza probabilística da fonte de mensagens, todavia ausente da teorização dos códigos).

Exemplo de restricção na admissibilidade é o caso em que se consideram sòmente os códigos

[1] Este artigo é o primeiro capítulo da Quarta Parte, *Complementos*, de *Teoria Matemática de Informação*, notas de um curso da Direcção dos Serviços Técnicos dos CTT, em publicação.

de palavras de certo comprimento, fixado ou não; outro, o dos códigos onde os comprimentos das palavras não excedem um número dado. Qualquer condição de admissibilidade delimita uma classe de códigos que se rotulam com um adjectivo; os códigos *regulares* são os em que as palavras têm o mesmo comprimento.

Uma classe importante de códigos é a dos códigos de palavras separáveis (sem palavra de separação), ou códigos separáveis, de que vamos ocupar-nos.

Chama-se mensagem codificada num código, ou só mensagem, a uma sucessão de palavras do código. Quando não podem existir sucessões distintas onde as primeiras letras sejam iguais, bem como as segundas e as de qualquer ordem n, o código diz-se *separável* ou *ùnicamente decifrável* (as motivações do interesse por esta classe de códigos está bem patente na escolha das designações). O código (0 : 1) é separável, ou ùnicamente decifrável; o código (0 : 01), também. O código (0 : 01 : 001), não é separável visto que a sucessão de termos 0, 01 e 001, se não distingue da sucessão de termos 001 e 001.

O código (0 : 1) diz-se *primitivo* porque nenhuma das palavras é derivada da outra, nenhuma palavra é prefixo noutra. Todos os códigos primitivos são separáveis; (0:01) é um código separável que não é primitivo.

Quando a cada palavra x_i de um código se associa o seu comprimento l_i e um peso w_i obtém-se um conjunto de termos (x_i, l_i, w_i) a que se chama um código ponderado. Se os pesos w_i não são negativos e somam a unidade, chama-se-lhes probabilidades e representam-se preferìvelmente por p_i. O código onde os pesos são probabilidades chama-se código distribuído; a sucessão p_i chama-se a distribuição do código ou a distribuição da probabilidade no código. Os códigos uniformemente distribuídos são os em que a distribuição é uniforme. Pode, pois, falar-se da classe dos códigos com a mesma distribuição e, tendo-se definido entropia duma distribuição, pode falar-se da classe dos códigos distribuídos com a mesma entropia. Assim, de cada terno (palavra-comprimento-probabilidade), o segundo elemento entra no cálculo do comprimento médio L do código, o terceiro no cálculo da entropia H.

Quando num código ponderado se tenha $w_i \geqslant w_{i+1}$, o código diz-se ordenado. Salvo menção em contrário os códigos que se vão considerar são ordenados.

Sejam os códigos binários, isto é, os conjuntos C de representações binárias de números naturais. As palavras desses códigos são representáveis pelos pontos de ramificação de árvores dicotómicas, como a da Figura 1.1, onde os pontos da linha k correspondem às possíveis palavras de k letras. Os ramos não cortados são os que irão passar por uma palavra do código; os ramos cortados, não. Na árvore de um código primitivo pode, pois, apagar-se o ramo que sai dum ponto palavra, e recìprocamente, quando subindo de um ponto palavra se não atinge nenhum outro o código é primitivo.

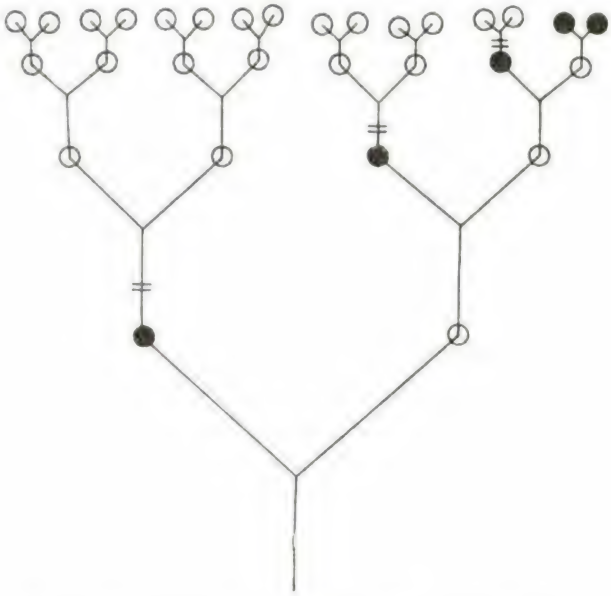


Figura 1.1 — Arvore de um código binário primitivo

Chamemos fórmula de um código a sucessão dos números de palavras de comprimentos 1,2, . . ., k, . . . que se representará por

$$(n_1, n_2, \ldots, n_N)$$

cada código tem uma fórmula. Mas, dado um símbolo destes, que chamaremos sempre fórmula, em que condições haverá um código que lhe pertença?

A condição necessária e suficiente para que a fórmula $(n_1, n_2, \ldots, n_N)$ pertença a um código binário é, evidentemente que $n_k \leqslant 2^k$ ou $\frac{n_k}{2^k} \leqslant 1$.

Quando, porém, se queira que o código seja pri-

mitivo deve atender-se a que n_k e n_{k+1} não podem violar a relação

$$2n_k + n_{k+1} \leqslant 2^{k+1}$$

e, mais geralmente,

$$2^{N-1} n_1 + 2^{N-2} n_2 + \ldots + 2n_{N-1} + n_N \leqslant 2^N$$

ou

$$\sum \frac{n_k}{2^k} \leqslant 1$$

A condição que assim se obtém revela-se não só necessária como suficiente para que um código seja *separável* (e não só primitivo) facto cujo enunciado constitui o *teorema fundamental dos códigos*, cujo enunciado corrente é: a condição necessária e suficiente para que exista um código separável de base b de fórmula $(n_1, \ldots, n_N)$ é que se verifique a condição de Szilard-Kraft

$$\sum \frac{n_k}{b^k} \leqslant 1$$

Antes de passarmos à sua demonstração exploremos algumas questões relacionadas com o facto.

Exercício 1.1: O número de palavras de comprimento não superior a N num código de base b é $\dfrac{b^{N+1} - b}{b - 1}$.

Problema 1.1: *Construir um código binário primitivo de 10 palavras de comprimentos o mais pequenos possível, isto é, nunca incluindo no código uma palavra quando ainda seja possível incluir uma mais pequena.*

O comprimento máximo N está por determinar. Iremos construir o código progressivamente obtendo o N no fim da construção. A existência de solução decorre do seguinte

Teorema 1.1: *Há sempre um código primitivo de υ palavras; há sempre um código primitivo de base b e υ palavras.*

Tomando $b = \upsilon$ tem-se um código primitivo de υ palavras de comprimento 1; para $b > \upsilon$, vários. Sendo N tal que $2^N > \upsilon$ tem-se códigos binários primitivos de υ palavras de comprimento N.

Tomemos para palavra do código ou 0 ou 1, mas não os dois, porque teríamos $\dfrac{n_1}{2^{n_1}} = 1$ e $n_k = 0$ para $k > 1$: o código só teria 2 palavras. Seja 0 a primeira palavra do código. Anàlogamente se pode tomar 10 ou 11 para segunda palavra, mas não as duas, visto que de

$$\frac{1}{2} + \sum_2 \frac{n_k}{2^k} \leqslant 1$$

vem

$$\sum_2 \frac{n_k}{2^{k-1}} \leqslant 1$$

e de $n_2 = 2$ viria $n_k = 0$ para $k > 2$: o código só teria 3 palavras. Seja 10 a segunda palavra do código. A terceira virá a ser 110, e assim sucessivamente até à nona, 111111110. A décima, e última palavra, já pode ser 111111111. Tem-se pois o código.

0	111110
10	1111110
110	11111110
1110	111111110
11110	111111111

Este é um exemplo de uma categoria de códigos que chamaremos progressivos ou saturados onde se vão construindo sucessivamente as palavras de comprimentos crescentes incluindo em cada comprimento k o número máximo de palavras possível: $b - 1$ para $k < N$ e b para $k = N$. Fàcilmente se demonstra o seguinte

Teorema 1.2: *O número máximo de palavras de um código progressivo de não mais de N letras, o número de letras que lhe corresponde e o comprimento médio do código são respectivamente,*

$$\mu = (b - 1)\, N + 1$$

$$\lambda = (b - 1)\, \frac{N(N + 1)}{2} + N$$

$$L = \frac{N + 1}{2} + \frac{N - 1}{2(b - 1)N + 2}$$

Neste exemplo,

$$N = 9 \qquad \mu = 10 \qquad \lambda = 54 \qquad L = 5{,}4$$

A questão que agora se levanta é a de se um código progressivo completo pode ser aceitável do ponto de vista do critério L. Por exemplo, não será preferível reter, em vez de uma palavra de tamanho k as b palavras de tamanho $k+1$ que prejudica? É o que vamos estudar no exemplo.

Problema 1.2: *Inquirir da existência, na classe dos códigos distribuídos, de códigos mais curtos do que o código anterior, obtidos «diferindo» a escolha da palavra.*

Notemos, todavia, que passamos aqui a considerar códigos distribuídos e que a resposta a questões desta natureza dependerá da distribuição da probabilidade no código.

O problema só tem, pois, sentido quando se fizer uma distribuição de probabilidade pelo código não distribuído que considerámos. Pensa-se muitas vezes um código não distribuído como um código uniformemente distribuído; nestes domínios, porém, esta prática tem de ser considerada uma hipótese de cálculo, a hipótese de Bayes, cuja passagem a hipótese física envolve como se sabe muitas dificuldades.

Comparemos pois os comprimentos médios dos dois códigos da mesma distribuição, onde se substituiu a palavra duma letra do primeiro pelas palavras de duas letras que prejudica e se eliminou a sua última palavra.

	C	C'
p_1	0	00
p_2	10	01
p_3	110	10
p_4	1110	110
p_5	11110	1110
p_6	111110	11110
p_7	1111110	111110
p_8	11111110	1111110
p_9	111111110	11111110
p_{10}	111111111	11111111

Tem-se

$$L = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots + 9p_9 + 9p_{10}$$
$$L' = 2p_1 + 2p_2 + 2p_3 + 3p_4 + \dots + 8p_9 + 8p_{10}$$

e $L < L'$ se $p_1 > p_3 + \dots + p_{10}$. Satisfeita esta condição, não é conveniente a substituição da primeira palavra; se, pelo contrário,

$$p_1 < p_3 + \dots + p_{10}$$

então a substituição encurta o código de $(p_3 + \dots p_{10}) - p_1$.

Observe se que, agora, o número de letras das palavras mais compridas é $N' = N - 1$.

Vejamos quando não substituir a segunda palavra 10. Seja

	C	C''
p_1	0	0
p_2	10	100
p_3	110	101
p_4	1110	110
p_5	11110	1110
p_6	111110	11110

Tem-se

$$L'' = p_1 + 3p_2 + 3p_3 + 3p_4 + 4p_5 + \dots + 8p_{10}$$

e $L > L''$ se $p_2 > p_4 + \dots + p_{10}$. Estes resultados são generalizáveis e pode-se demonstrar o seguinte:

Teorema 1.3: *Um código binário ordenado e progressivo, em que N é o maior comprimento das palavras, é óptimo pelo critério L se, para todos os i,* $p_i > p_{i+2} + \dots + p_{N+1}$. *Em particular, os códigos progressivos ordenados de distribuição*

$$\left(\frac{1}{2^k}, \dots, \frac{1}{2^N}, \dots, \frac{1}{2^N}, \frac{1}{2}\right)$$

são óptimos-L.

A demonstração da última parte decorre da identidade

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^k} = 1\frac{1}{2^k}$$

mediante a qual a condição toma a forma

$$\frac{1}{2^{i+1}} < \frac{1}{2^i}.$$

Um código binário diz-se terminalmente progressivo quando

$$n_k = 1 \quad \text{se} \quad k_0 \leq k < N$$
$$n_k = 2 \quad \text{se} \quad k = N$$

e é evidente que um código terminalmente progressivo é encurtável pela substituição da palavra de comprimento k_0 se

$$P(x_{k_0}) > P(x_{k_0} + 2) + \dots + P(x_{N+1})$$

Em particular, um código progressivo encurtado é, em geral, um código terminalmente progressivo podendo ser novamente encurtado. Reconhecer-se-á aqui uma formalização do que vimos no exemplo.

Para simplificar o estudo dos códigos progressivos encurtáveis pode ser conveniente a consideração de códigos progressivos *modificados* que nunca usam uma das palavras de tamanho N e têm então, no máximo, (b-1) palavras de cada tamanho, de 1 a N. O número máximo de palavras deste código é $\mu' = (b-1)N$ e o número máximo de letras, $\lambda' = (b-1)\frac{N(N+1)}{2}$. O comprimento médio do código completo, $L' = \frac{N+1}{2}$, é independente da base.

Prevê-se pois que, em oposição às distribuições fortemente decrescentes, em que a codificação progressiva seja óptima, a distribuição uniforme seja inadequada a esta codificação. O resultado $L' = \frac{N+1}{2}$ sugere que os códigos regulares sejam preferíveis.

Problema 1.3: *Obter o menor alfabeto em que existe um código primitivo de fórmula (1,3,1,4) e construí-lo.*

Seja b a base, a descobrir, do código que se procura. Se $b = 2$ dispomos de 2 palavras de comprimento 1; usada uma, resta outra, que origina 2 palavras de comprimento 2, o que é insuficiente. Se $b = 3$ temos, livres, 2 palavras de tamanho 1, para formar $2 \times 3 = 6$ palavras de tamanho 2, de que se usam 3. Vamos ter $3 \times 3 = 9$ palavras de tamanho 3 e $8 \times 3 = 24$ palavras de tamanho 4, de que se não usam 20. Procedendo ordenadamente, forma-se o seguinte código:

0	2010
10	2011
11	2012
12	2020
200	

A desigualdade de Szilard-Kraft, que no fundo mecaniza o processo anterior,

$$\frac{1}{b} + \frac{3}{b^2} + \frac{1}{b^3} + \frac{4}{b^4} \leqslant 1$$

não é cómoda de resolver de uma maneira directa. Se atendermos ao processo podemos, todavia, dar-lhe a forma

$$F_N(b) \geqslant 0$$

onde F_N é o polinómio, de grau N, cujos coeficientes são $1, -1, -3, -1, -4$. O cálculo de F_N pelo algorítmo das conchas conduz a

$$(((b-1)b-3)-1)b-4 \geqslant 0$$

É evidente, todavia, que se melhora a condição quando se exprime no seguinte

Teorema 1.4: *Para que a fórmula* $(n_1, \ldots, n_N)$ *corresponda a um código primitivo de base* b *é necessário e suficiente que nenhum dos números*

$$b - n_1$$
$$(b - n_1)\, b - n_2$$
$$((b - n_1)\, b - n_2)\, b - n_3$$
$$\ldots$$

seja negativo. Assim, só o último pode ser nulo; os anteriores são significativos.

Podemos dizer, também,

Teorema 1.5: *A menor base em que se pode construir um código primitivo de fórmula* $(n_1, \ldots, n_N)$ *é o menor número natural que torna positivos os polinómios*

$$F_i \equiv (1, -n_1, \ldots, -n_i) \qquad i = 1, \ldots, N$$

com a possível excepção do último, que pode ser nulo.

Este é, num enunciado novo, o teorema fundamental dos códigos para o caso dos códigos primitivos.

2. CÓDIGOS SEPARÁVEIS NÃO PRIMITIVOS

A separabilidade do código primitivo reside, essencialmente, em que na leitura das mensagens se reconhecem as sucessões de letras que formam palavras logo que se completam, não exigindo memória; por isso estes códigos se chamam também instantâneos. As palavras ficam imediatamente separadas; nenhuma palavra é raíz de outra; não há sufixos nem prefixos; tudo são palavras primitivas (ou simples).

Num código não primitivo duas coisas podem acontecer: ou a sucessão completa uma das palavras sem derivadas, que também fica logo sepa-

rada; ou a sucessão que completa a palavra pode também ser um prefixo, e há dúvida. Neste caso a letra seguinte pode decidir ou não: se com mais essa letra fica formada uma palavra que não dá derivadas, ela é separada; se, pelo contrário, ainda se tem uma palavra com derivadas podemos ter só um prefixo, e a leitura tem de continuar, ficando a separação suspensa. Tal acontece com mensagens no código (0 : 000001) onde, por exemplo, a mensagem 0000001 só é separada, em 0 e 000001, com a aparição da unidade. Assim, numa mensagem em código não primitivo, a separação das palavras faz-se retroactivamente e por passos: a aparição de certa letra adverte-nos que a sucessão de letras para trás se pode separar do seguimento, podendo ser capaz de nova separação. Uma análise subsequente divide a sucessão nas palavras que a constituem, e essa divisão poderá fazer-se de uma só maneira ou de várias; no primeiro caso o código diz-se separável. Quando uma ou mais letras acrescentadas a uma palavra simples formam uma palavra sem derivadas, a separação da palavra inteira é única *se o sufixo não constituir por si uma palavra.* A separação poderá ser feita de duas maneiras se o sufixo é também uma palavra do código; assim, no código

0
1
2
01

a separação de 012 faz-se com a aparição do 2 mas não é única.

Estas observações conduzem a chamar imprópria uma palavra que se possa decompor em duas e, visto que a mensagem constituída por uma palavra imprópria é ambígua, a reconhecer o seguinte:

Teorema 2.1: *Qualquer código que tenha palavras impróprias não é separável.*

Este enunciado banal é caso muito particular de outro, devido a Sardinas e Patterson, que iremos obter partindo daqui. O primeiro passo será verificar se o teorema é reciprocável e, se não, esclarecer porquê.

Suponhamos que o código C não tem palavras impróprias, isto é, que nenhum dos sufixos nas palavras derivadas é por si só uma palavra. Pode acontecer, porém, que o sufixo s da palavra rs seja decomponível em duas palavras de C, r_1 e s_1. Neste caso as mensagens rs e $rr_1 s_1$ correspondem à mesma sucessão de letras e o código é ambíguo. Seja o exemplo a seguir, onde se representa por S o conjunto dos sufixos de C,

C: 0
1
010 S: 10

Como se vê, nenhum sufixo é palavra mas o sufixo 10 é decomponível em palavras o que torna ambígua a mensagem 010.

Esta maneira de pensar é continuável. Obtida a primeira lista de sufixos, pode cada um deles dividir-se numa raíz e num sufixo; se algum dos sufixos de segunda ordem é palavra, o código é ambíguo; se nenhum deles é, transfere-se para o seu conjunto S'' a questão que se tinha para S'. É esta marcha que mostra que o código (0 : 1 : 000001) não é separável; seguindo-a para o código (0 : 000001), que sabemos ser separável, ela mostra que os sufixos das diversas ordens se não dividem em palavras.

Um exemplo simples mostra, todavia, que não é suficiente, para ser o código separável, que todos os sufixos das diversas ordens sejam próprios. Seja o código C, que representamos a seguir com os conjuntos dos sufixos das diversas ordens,

C	S	S'
0		
01	1	
001	01	1

A condição verifica-se e, todavia, a mensagem 001 pode ler-se das duas maneiras 0 — 01 e 001.

É esta oportunidade de observar que toda a discussão anterior se poderia ter feito em termos de palavras simples e palavras compostas por prefixação, em vez de em termos de palavras primitivas e palavras derivadas por sufixação. Assim, ao critério anterior virá juntar-se que, para um código ser separável, devem também os prefixos das diversas ordens ser próprios, isto é, não se decomporem as palavras. O quadro adicional para o código anterior é (leia-se ao contrário).

P	C
	0
	01
0	001

Logo em P se encontra o prefixo que é por si uma palavra e se obtém a mensagem ambígua 001.

Será suficiente esta condição de nunca serem impróprios os prefixos e sufixos, como é necessária, para que um código seja separável? Antes de procurarmos uma resposta, consideremos um exemplo mais complicado.

Problema 2.1: *Procurem-se mensagens ambíguas no seguinte código:*

010	010
0001	1100
0110	0110
1100	0001
00011	00110
00110	11110
11110	00011
101011	101011

A única palavra com derivada é 0001; o sufixo é 1, a palavra derivada 00011. A única palavra em composição é 0110; o prefixo é 0 e a palavra composta 00110. A condição está verificada: não há prefixo ou sufixo que seja por si palavra, ou decomponível em palavras; se o contrário acontecesse o código seria imediatamente ambíguo. Exploremos a possibilidade de construção de uma palavra ambígua.

É evidente que uma mensagem ambígua que comece por uma palavra sem derivadas dá, por supressão dessa palavra, uma mensagem mais curta com uma ambiguidade do mesmo motivo. Por uma razão paralela, na parte final duma mensagem ambígua podem suprimir-se sucessivamente as palavras que não originem compostas por prefixação. Pode, pois, concluir-se que, se houver alguma mensagem ambígua neste código, ela deverá começar por 00011 e acabar por 00110. Também, se a ambiguidade não explorasse as decomposições destas palavras, elas poderiam ser suprimidas deixando a mensagem ambígua. Somos assim levados a saber que mensagem ambígua, que possa existir, começa e acaba naquelas palavras vindo a ambiguidade das suas decomposições. Podemos pois imaginar a mensagem ambígua com a representação seguinte:

00011xxx . . . xxx00110 (1)

correspondendo as duas leituras às diversas separações da primeira palavra

0 0 0 1 1′ (2′)
0 0 0 1′1 (2″)

A continuação é determinada pela separação do sufixo em (2″). A palavra a juntar deverá começar por esse sufixo. Daí em princípio três continuações

0 0 0 1 1′1 0 0 (3′)
0 0 0 1′1 1 0 0 (3″)

0 0 0 1 1′1 1 1 0 (4′)
0 0 0 1′1 1 1 1 0 (4″)

0 0 0 1 1′0 1 0 1 1 (5′)
0 0 0 1′1 0 1 0 1 1 (5″)

Anàlogamente aqui, estando separados nas primeiras leituras segmentos sobre os quais não incidiu a atenção, é por esses segmentos que devemos continuar. Se algum for uma palavra, está construída a mensagem ambígua. Não sendo assim, se algum deles for prefixo de uma palavra, ou for uma palavra seguida dum prefixo, completar-se-á a palavra a que o prefixo corresponde como única maneira de continuar. As combinações (3) e (4) ficam eliminadas porque nem 100 nem 1110 são palavra ou palavra seguida de prefixo pelo que não constroem a mensagem ambígua nem permitem continuação.

Subsiste a combinação (5); 01011 não é palavra e a mensagem ambígua não fica construída mas a continuação é possível pela decomposição que se indica

0 0 0 1 1′0 1 0′1 1 (6′)
0 0 0 1′1 0 1 0 1 1 (6″)

Do mesmo modo, a separação do sufixo em (6′) dá pois duas continuações possíveis

0 0 0 1 1′0 1 0′1 1 0 0 (7′)
0 0 0 1′1 0 1 0 1 1′0 0 (7″)

0 0 0 1 1′0 1 0′1 1 1 1 0 (8′)
0 0 0 1′1 0 1 0 1 1′1 1 0 (8″)

Anàlogamente, de (7″) vêm três continuações e de (8″) mais uma

0 0 0 1 1′0 1 0′1 1 0 0′0 1 (9′)
0 0 0 1′1 0 1 0 1 1′0 0 0 1 (9″)

0 0 0 1 1'0 1 0'1 1 0 0'0 1 1 (10')
0 0 0 1'1 0 1 0 1 1'0 0 0 1 1 (10'')

0 0 0 1 1 '0 1 0'1 1 0 0'1 1 0 (11')
0 0 0 1'1 0 1 0 1 1'0 0 1 1 0 (11'')

0 0 0 1 1'0 1 0'1 1 1 1 0'0 (12')
0 0 0 1'1 0 1 0 1 1'1 1 0 0 (12'')

Agora, (9') dá duas continuações uma com 0 e outra com 10; (10'), também uma com 0 e outra com 10; (11'), uma com 0; e (12'), uma com 10, outra com 001, outra com 110, outra com 0011 e outra com 0110.

Voltando ao que se disse acima, qualquer mensagem ambígua que exista termina com a palavra 00110, chamada pelo prefixo 0. Teremos pois chegado ao fim logo que se prepare um 0 terminal, o que exactamente aconteceu em (12'). Entre as várias continuações de (12'), lá está a que termina a frase ambígua que é então nas duas leituras a seguinte

0 0 0 1 1'0 1 0'1 1 1 1 0'0 0 1 1 0 (13')
0 0 0 1' 1 0 1 0 1 1'1 1 0 0'0 1 1 0 (13'')

Fica pois provado que o código proposto não é separável, pela construção duma frase ambígua.

Observe-se que a aparição do 0 terminal faz a prova da ambiguidade do código. Por outro lado, a mesma sílaba terminal pode aparecer de várias maneiras, multiplicando eventualmente as mensagens ambíguas, sem nenhuma vantagem quando só se pretenda provar a ambiguidade do código. Sugere-se pois, que se extraia do procedimento acima um procedimento mais breve para o efeito de demonstrar a ambiguidade sem a construir.

Fàcilmente se reconhece que a listagem em cada passo dos segmentos terminais que possibilitam a continuação chegaria no caso acima para obter a conclusão. Os sucessivos conjuntos desses segmentos terminais são

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
1	100	11	00	01	0
	1110		110	011	10
	01011			110	001
				0	110
					0011
					0110

O grupo S_6 é prescindível do nosso ponto de vista mas intervém no critério de separabilidade de Sardinas e Patterson, tal como enunciado em Ash (1965).

Teorema 2.2: *Forme-se a sucessão de conjuntos $S_0, S_1, S_2, \ldots$ da maneira seguinte. Seja S_0 o conjunto das palavras do código. Para formar S_1, aproximem-se todos os pares de palavras de S_0. Se a palavra W_i é prefixo de outra palavra W_j, isto é, se $W_j = W_iA$, coloca-se A em S_1. Para formar S_n, para $n > 1$, compare-se S_0 com S_{n-1}. Se a palavra W é prefixo de uma sequência $A = WB$ em S_{n-1}, o sufixo B é colocado em S_n. Se a sequência A' de S_{n-1} é prefixo da palavra $W' = A'B'$, o sufixo B' é posto em S_n.*

O código S_0 é ùnicamente separável sss nenhum dos seguintes conjuntos S_n $(n > 1)$ tem uma palavra do código.

(Fim do problema)

Um pouco de reflexão mostra que este enunciado cobre o procedimento que seguimos, embora pouco sugestivamente. O seu maior defeito está, todavia, em que não inclui a afirmação de que o procedimento é finito, indispensável visto que a sucessão S_n pode ser infinita em conjuntos não vazios como se verá na discussão seguinte. Procuremos assentar num procedimento económico baseado na experiência anterior.

Problema 2.2: *Investigar a possível ambiguidade do código*

123
1234
2135
3512
3513
421
5
5124

Visto que última palavra de mensagem ambígua tem de ser composta por um prefixo (que será separado numa das leituras) procuremos palavras com prefixos e separemos os seus prefixos. Para isso, ordenemos o código pelas letras de fim a princípio.

421	5124
3512	1234
3513	5
123	2135